

Һ.Н. АҒАЕВ

*ҺӘГИГИ ӘДӘДЛӘР
ВӘ ЛИМИТЛӘР*

АЗӘРНЕФТНӘШР
БАКЫ - 1958

Н. Н. АГАЕВ

Досент, физика-риязийат элмлэри намизэди

НӘГИГИ ӘДӘДЛӘР ВӘ ЛИМИТЛӘР

АЗӘРБАЙҖАН ДӨВЛӘТ НЕФТ ВӘ ЭЛМИ-ТЕХНИКИ
ӘДӘБИЯТ НӘШРИЯТЫ

Бакы — 1958

АННОТАСИЯ

Охучуларга тэгдим эдилэн бу китаб мүййән мә'нада риязийята киришдир.

Китабда һәгиги әдәдләрин мәншәи вә инкишаф йоллары көстәрилир. Натурал әдәдләрдән башлаяраг әдәд аңлайышы ардычыл сурәтдә кенишләндирилир вә һәгиги әдәдләрин онлуг кәсрләрлә нәзәрийәси гурулур. Китабда ардычыллыглар вә лимитләр бәһси илә янашы олараг бир сыра тарихи мәсәләләр вә һәр бәһсин өзүнә аид мисаллар топланмышдыр. Бу чәһәт сун кениш охучу күтләләри тәрәфиндән истифадә эдилмәсинә имкан ярадыр.

Китабдан орта мәктәб вә техникумларын шакирдләри һәбелә риязийят һәвәскарлары истифадә эдә биләрләр.

Китаб, али риязийят охуян теләбәләрин вә риязийяты өзбашына өйрәнән шәхсләрин риязи билийини артырмаға, риязийятын маһийәтини баша дүшмәйә билаваситә көмәк эдә биләр.

Китабдан орта мәктәбин риязийят мұәллимләри көмәкчи дәрслик вә риязийят дәрнәкләринин материаллары кими истифадә эдә биләр.

Гашиш Низам оглы Агаев

Доц. канд. физико-математических наук

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПРЕДЕЛЫ

Редактору *М. Н. Хүсейнов*

Нәшрийят редактору *И. С. Зәркәрли*

Корректорлары *С. М. Абдуллаева Б. М. Абдуллаев*

Йыгылмаға верилмиш 26/IX-1958. Чапа имзаланмыш 16/XII-1958. Кағыз форматы 60X²/₁₆.
 Чап вәрәги 10,25. Һесаб-нәшрийят вәрәги 9,54. ФГ 13359. Сифариш 525/485. Тиражы 2000.
 Гиймәти 5 ман. 10 гәп.

Азәрнефтнәшр, Бақы, Сталин проспекти, 73

Азәрбајжан ССР Мәдәнийәт Назирлиинин „Гызыл Шәрг“ мәтбәәси.
 Бақы, Һәзи Асламов күчәси, 80.

І НИССӘ

ӘДӘД АНЛАЙЫШЫНЫН ТӘКАМУЛУ

§ 1. НАТУРАЛ ӘДӘДЛӘРИН МӘНШӘИ ВӘ ТӘШӘККУЛУ

Ибтилай ичма дөврүндә яшаян инсанлар өз тәкмилләшмәмиш нәзәрләрини тәк-тәк әшяя дейил, әшя чохлуғуна салмышлар. Инсан чәмиййәти әшя чохлуғуну, мәсәлән, һейван сүрүсүнү, гушларын дәстәсини, мешә ағачларыны вә с. айры-айры әшяя айырынча узун бир тарихи инкишаф йолу кечмишдир.

Әшяны бир-бириндән айыра билмәк, фәрдиләшдирмәк вәрдишини газанмаг иш индән әввәл онларын күллү мигдарда даһа бәси олан дикәр кейфиййәтләрини өйрәнмәк лазым кәлмишдир. Белә кейфиййәтләр чох мүхтәлиф вә рәнкарәнкдир. Мәсәлән вәһши һейванлары бир-бириндән айыран онларын дәһшәтли сәсләрини, горхулу көгкәмләрини, сүрәтли гачышларыны вә и. а. кими кейфиййәтләрини кәсгәрмәк олар. Әшянын, садә олса да, белә кейфиййәтләрини һисс әдиб өйрәндикдән сонҗа онлары саймаг имканлары мейдана чыхмышдыр. Һәтта бу чәһәт мәчәзи мәһнада ишләдилән „адамы сайыб вә я саймамаг“ кими ибарәси, чох күман ки, әввәлләрдә әшянын сайылмасы ишинин онларын кейфиййәти илә әләгәдар олмасыны әкс әтдирмиш вә дилимиздә мүһәфизә әдилмишдир.

Демәли, саймаг үчүн сайыласы әшянын тәкчә варлығы дейил, онларын кейфиййәтләринин дә мүһүм ролу олмушдур. Мәһз буна көрә дә ер үзүндә илк дәфә яшамаға башләян инсан чәмиййәти әһтияч үзүндән истифадә әтдийи шейләри сая билмәк вәрдишинә малик дәйилди. Инсанлар оду әһтияч гаршысында тапдығы кими, чи имләри саймағы да өз әмәли фәалиййәтләриндә вәрдиш әтмиш вә нәсилдән-нәслә кечирмишләр. Һәтта чох гәдим әфсанәләрдә од вә сайы аллаһын пейғәмбәрләрә вә гәһрәманларә сәхш әтдийиндән вә я онларын аллаһдан зорла од вә сай алдығындан даньшылыр. Бу бир әфсанә олараг галса да һәмин әфсанәдән инсан оғлунун ер

үзәриндә бөйүк әһтияч гаршысында галараг од вә сай ара-
дығы бир һәгигәт дуюлур.

Әшя чохлуғунун онларын тәбиәтилә әлагәдар олмаян үмуми хассәләрини тапыб ашкара чыхартмаг һәр дөврдә олдуғу кими һәммин дөврүн дә чәтин мәсәләләриндән бири олмушдур. Бу чәтин мүбаризә йолларында күлли мигдарда мүвәффәгийәтләр вә гейри-мүвәффәгийәтләр олмуш, силиниб кедән вә силинмәйән изләр бурахылмышдыр.

Узун заман апарылан мүшаһидә вә тәчрүби фәалийәт нәтичәсиндә инсанын билик һоризонтунда вә диггәт мәркәзиндә дуран чисимләр өз тәбии чизкиләрини инсан бейнинә нәгш этди вә онда реал аләмин кет-кедә дүзкүн тәсәввүрләрини яратды. Беләликлә, әдәд вә фигур аңлайышы яранмаға башланды.

Әшяны бир-бириндән айыран кейфийәтләрини гисмән өйрәндикдән сонра сай просесинин икинчи мәрһәләсиндә һәммин кейфийәтләри нәзәрә алмамаг вә бир нечә әшя чохлуғуна гаршы, диһәр әшя чохлуғу гоймаг вә беләликлә чохлуғлар арасында уйғунлуғ яратмаг кими вәрдишләри газанмаг әһтиячы ортая чыхды вә илк дәфә тәбии олараг әшя илә әл бармаглары арасында уйғунлуғ ярадылды. Беләликлә, әл бармаглары сайма просесиндә бир „стандарт“ чохлуғ вәзифәсини дашымаға башлады вә һәр дәфә шейләри саяркән һәр бир шейә гаршы бир бармаг гатламаг вә я айырмаг вәрдиши газанылды.

Лакин инкишафын бу мәрһәләсиндә сай просесинин үмуми чәһәтләри һәлә инсан фикриндә кәскин айырды әдилмәмишди; мәсәлән, „үч адам“, „үч ағач“, „үч чай“ чохлуғларынын һамысында үч олмасы кими үмумилик аңлашылмаз галмышды.

Бир сыра гәбиләләрин дилләриндә сайла әлагәдар олан сөзләри тәдгиг әтдикдә мүәййән әдилмишдир ки, әйни мигдарда кәтүрүлән мүхтәлиф әшя чохлуғу мүхтәлиф сөзләрлә адландырылмышдыр. Мәсәлән, „үч адам“, „үч чай“ кими сөзләрин һәр икисиндә „үч“ сөзү дейил, айры-айры сөзләр ишләдилмишдир. Лакин сайла әлагәдар ишләдилән сөзләр чох дейилди. Әшя чохлуғуну фәрдиләшдирмәйәрәк адландырмаг үчүн „чох“ сөзү енә дә мүхтәлиф шәкилдә ишләнирди. „Чох адам“, „чох даш“ вә и. а сөзләриндә „чох“ сөзү әшянын ады илә бағланараг мүхтәлиф шәкилдә ишләнирди.

Тәдричән мүхтәлиф чохлуғлары саяркән үмуми олан чәһәтләр мейдана чыхмаға башлады. „Үч адам“, „үч ағач“, „үч чай“ дейилдикдә „үч“ сөзү онун бағландығы адам, ағач, чай кими чисимләрин маһийәтиндән айрылды вә мүчәррәдләшди. Бу гайда илә сай просесинин нәтичәсиндә бир, ики, үч вә с. натурал әдәлләр мейдана кәлди. Демәли, чисимләрин конкрет кейфийәтләриндән, хассәләриндән узаглашараг, онларын сайларыны кәстәрән хассәләрини өйрәнмәк нәтичәсиндә

натурал эдэдлэр эмэлэ кэлди вэ инсанын эһтиячына табе эдилди. Лакин эһтияч даһа чох шейләри саймаг лүзумуну яратды. Бир вэ я ики элин бармаглары бу мэгсэд үчүн кифайэт этмәди. Буна көрә дә ени вэ даһа зәнкин чохлуглар ишләдилди, мәсәлән, чубуглар үзәриндә ачылан кәртикләр вэ и. а. Сонралар исә натурал эдэдләр сырасы бу мэгсэд үчүн истифадә эдилән ән сәмәрәли бир чохлуг олду (һәммин фикри ашағыда изаһ эдәчәйик).

Һәр бир халгын гаршысында шифаһи нитг васитәсилә сай адларыны яратмаг, бир нечә сөз васитәсилә мүмкүн гәдәр бөйүк натурал эдәдләри ифадә этмәк кими вачиб мәсәлэләр дурмуш, бу вэ я дикәр шәкилдә һәлл эдилмишдир. Башга халглар кими Азәрбайчан халгы да өз әмәли фәалийәтиндә бу мәсәләнин һәлли йолларында шифаһи сай адларыны сөз эһтиятлары фондуна дахил этмиш вэ инкишаф этдирмишдир. Бу сай адлары бүтүн халгларда бармаглары саяркән („бармаг һесабы“) ишләдилән уйғун сөзләрлә адландырылмышдыр.

Бир чох дилләрдә олдуғу кими Азәрбайчан дилиндә дә шифаһи сайын әсасыны ашағыдакы сөзләр тәшкил эдир: бир (вахид гәбул эдилмиш), ики, үч, дөрд, беш, алты, едди, сәккиз, доггуз, он (онлуг), йүз (йүзлүк), мин (минлик), миллион, киз, доггуз, он (онлуг), йүз (йүзлүк), мин (минлик), миллион, миллиард, трильон вэ с. Галан сай адлары бу сөзләрин бу вэ я дикәр бирләшмәси шәкилдә ярадылмышдыр. Гейд этмәк лазымдыр ки, дилимизә миллион, миллиард, трильон сөзләри башга дилләрдән кечмишдир. Бу сөзләрин мәншәи һаггында белә бир рәвайәт вардыр. Дейиләнләрә көрә Венесия сәйяһы Марко Поло (XIII әср) Узаг Көй империясында (Чинин гәдим адыдыр) көрдүйү түкәнмәз мигдарда инсан вә сәрвәт эһтиятыны шәрһ этдикдә, ады мәлум олан эдәдләрин кифайәт этмәдийини көрүб „миллион“ сөзүнү ишләтмишдир. Италияча *millione* (миллионә) сөзү *mille* (милле—йүз демәкдир) сөзүнүн бөйүдүлмүш шәклидир. Сонралар мин миллион, билйон вэ я миллиард сөзләри ишләдилмишдир. Галан эдәд адлары латынлашдырылараг гурулмушдур вә бүтүн дүняда бир чүр ишләдилмәкдәдир. Бу адларын нечә ярадылдығыны билмәк үчүн эдәдләрин һәр үчмәртәбәсинин бир синиф адландырылмасына нәзәр етирмәк лазымдыр. Садә тәклик, онлуг, йүзлүк биринчи синифдән; минлик, он минлик, йүз минлик икинчи синифдән; миллион, он миллион, йүз миллион үчүнчү синифдән; билйонлар (он, йүз билйон) дөрдүнчү синифдән ибарәтдир. Дөрдүнчү синифдән башлаяраг һәр ени синфи адландырмаг үчүн синфин нөмрәсини ики ваһид азалдыб алынан вә латынча дейилән эдәдин ахырына „илйон“ шәкилчисини әлавә этмәк лазымдыр.

Мәсәлән: бешинчи синфин ваһидләри „трильон“ адланыр, чүнки $5-2=3$ -дүр. 3 исә латынча *tres* (трәс) демәкдир. Мүрәккәб сөзләрдә *tres* сөзү *tri* (русча „три“ дейилдийн кими) сөзүнә кечир.

Бу гайда илэ, һәр бир натурал эдәди бир нечә сөzlә адландырмаға, *шифаһи сай системи* дейилир.

Башга дилләрдә олдуғу кими Азәрбайчан дилиндә дә онлуг сай¹ системи гәбул эдилмишдир. Азәрбайчан дилиндә әллийә гәдәр юварлаг онлуглардан ибарәт олан сай адлары мұхтәлифдир (он, ийирми, отуз, гырх, әлли). Алтмыш, етмиш, сәксән, догсан адлары исә алты, едди, сәккиз, доггуз сөzlәриндән әмәлә кәлмишдир.

Рус дилиндә вә бә'зи башга дилләрдә юварлаг онлугларын адлары (десять, двадцать, тридцать, пятьдесят вә и. а.) бир, ики, үч вә и. а. сөzlәринин сонуна тәһриф эдилмиш „десять“ (он) сөзү әлавә әтмәклә алыныр вә бурада ялныз „сорок“ (гырх) сөзү мұстәсналыг тәшкил эдир.

Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: нә үчүн халглар арасында шифаһи онлуг сай системи гәбул эдилмишдир.

Ф. Әнкелсин дедийинә көрә инсанлар сайы он бармаглары үзәриндә өйрәндийиндән он эдәди, шифаһи сай системинин әсасы гәбул эдилмишдир.

Шифаһи нитгдән языя кечмәк тарихи әрәфәсиндә рәгәмләрин мейдана чыхмасы, беләликлә һәр бир сайын нәтичәсинин бир нечә рәгәм васитәсилә ифадә эдилмәси, натурал эдәдләрин тәшәккүлүндә мұһүм вә һәлләдичи рол ойнады.

Язы ишләринин инкишафы ени эдәдләр әләминин кәшфинә тәкан верән мұһүм амилләрдән бири олмушдур. Айры-айры шейләр үзәриндә чәкилән нәгшләр, хәтләр, эдәдләри ишарә әтмәк үчүн бабилиләрин кил язылары, мисирлиләрин мұһафизә әдәрәк сахладығы гәдим Ринд папируслары² (әрамыздан тәгрибән ийирми әср габаг язылмыш) гәдим мәдәнийәтин зәнкин абидәләри олараг галыр вә эдәдләр әләминин гаранлыг кечмишини бир гәдәр ишыгландырыр.

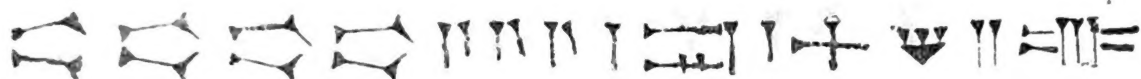
Рәгәмләрин ерләринә көрә гиймәтләринин тә'йин эдилмәси әсасында гурулан сай системинин Сумериләр вә Бабилиләр тәрәфиндән кәшф эдилдийи кұман эдилир.

¹ Онлуг сай системи һаггында ашағыда әтрафлы мә'лумат вериләчәкдир.

² Ринд папируслары әрамыздан габаг ХХІ—ХVІІІ әсрин абидәсидир. Үзәриндә һесаб вә чәбр мәсәләләри язылан папируслар онларын саһиби Риндин ады илә адланыр (бу папируслар Ахмес папируслары да адланыр. Ахмес, әрамыздан 2000 ил габаг һәмин папируслары тәртиб әдиб язан шәхсдир). Һазырда Ринд папируслары Британия музейиндә (Лондон) вә Москвада А. С. Пушкин адына тәсвири инчәсэнәт музейиндә сахланылыр. Ринд папирусларында 84 мәсәлә топланмышдыр. Бу мәсәләләр кәсрләр үзәриндә әмәлләрә, дүзбучаглынын, үчбучағын, трапесиянын вә даирәнин саһәләринин һесабланмасына һәср эдилмишдир. Әләчә дә һәмин мәсәләләр ичәрисиндә дүзбучаглы паралелепипедин вә цилиндрин һәчмләринин һесабланмасына аид мәсәләләр вардыр. һесаба аид мәсәләләр исә мұтәнасиб бөлмәләрә, һәм дә силсиләләрә һәср эдилмишдир.

Халдейлэрин¹ (кэлданилэр) сай системи һаггында ашағы-
дакы мә'лумат кэлиб бизэ чатмышдыр.

Халдейлэрин сай системи алтмышлыг систем олмушдур.
Бу эдэди халдейлэр сос (*soos*) адландырмышлар. 600 эдэди нэр
(*ner*) ады илэ адландырылмышдыр. 3600 эдэдинэ сар (*sar*) де-
йирмишлэр. Бу адлар бизим һазырда ишлэтдийимиз онлуг
системиндэки он, йүз, мин сөzlэри, оникилик системиндэ он
ики (дүжүн), йүз гырх дөрд (*gross*) вэ и. а. мүгабили кими
ишләнмишдир. Белэ бир адларын ишлэдилдийини көстөрмэк
үчүн ашағыдакы языя мүрачиэт эдэк. Һөкмдар Саргон Хорса-
бад шәһэринин даирәсини белэ көстөрмишдир:



Бурада *Sar Sar Sar Sar, Ner Ner Ner, Sos, 1 $\frac{1}{2}$ икигат Qa-
ni* (вэ я 3 *Qani*), 2 *Ammat*². сөzlэри 'язылмышдыр.

Язылмыш бу рэгэмлэри охуянлардан бири (Лепсиус) белэ
изаһ этмишдир:

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ Sar} & = 4 \times 3600 & = 14400 \text{ Ammat} \\ 3 \text{ Ner} & = 3 \times 600 & = 1800 \text{ " } \\ 1 \text{ Sos} & = 1 \times 60 & = 60 \text{ " } \\ 3 \text{ Qani} & & = 18 \text{ " } \\ 2 \text{ Ammat} & & = 2 \text{ " } \end{array}$$

Чәми: 16280 *Ammat* (дирсәк).

Гәдим язылардан мә'лум олмушдур ки, [халдейлэрдә 1-дән
60 гәдәр олан һәр бир натурал эдәд бир аллаһын адынын
ишарәси имиш.

Кил чәдвәлләрдә аллаһларын адлары гаршысында бу адлар
язылмышдыр:

<i>Anu</i> —60	<i>Sin</i> —30
<i>Bcl</i> —50	<i>Samas</i> —20
<i>Nisruk</i> —40	<i>Bin</i> —10

Башга кил чәдвәлләрдән мә'лум олмушдур ки, Халдейлэр
чинлэри һәр бириндә 7 чин олмага синифлэрә бөлүрмүшлэр.
Онлар 7 эдәдини мистик бир эдәд кими дүшүнүрмүшлэр. Бү-
түн бунлар Халдейлэрин мөвһумат тәрәфдән мискин бир кеч-

¹ Халдейлэр индики, Месопотамияда яшамышлар (Дәчлә вэ Фэрат чай-
ларынын саһилләриндә ерләшиб). Чох гәдим заманларда белэ бу өлкәдә
йүксәк мәдәни вэ күчлү бир дөвләт гурулушунун олмасы вэ һәтта, дейи-
ләнлэрә көрә дөвләтин биринчи дэфә бу өлкәдә мейдана кәлмәси һаггында
рәвайәт вардыр. Гәдим заманларда Халдейлэрин эдәд вэ астрaномия һаг-
гында илк биликлэрә йийәләндикләрини дә сөйләйән олмушдур. XIX эсрин
әввәлләриндә тапылан абидәләр бу фикри исбат этмишдир. Бу абидәлэрә
әсасән гәдим асурилэрин вэ бабилилэрин риязи мәдәниййәтә саһиб олдуг-
лары сөйләнилир.

² *Ammat*—дирсәк демәкдир тәхминән 525 мм-ә барабәрдир.

мишини хатырлатмагла бəрабəр онларын сай вə əдəдлərə чох гəдим заманларда йийəлəндийини сүбүт əдир.

Сай системи сонралар хиндлилəр тəрəфиндэн инкишаф əтдирилмиш вə мəдəни ирсин əн мəһтəшəм абидəsi кими йүк-сəлмишдир.

Даһа гəдим сай системлəri бир гайда олараг аддитив принцип (чəм принципи) əсасында гурулмушдур, йə'ни ваһиди ишарə əдэн рəгəми тəкрар əтмəклə һər бир сонракы рəгəми ишарə əдилмишдир. Мəсələn, əлдə əдилмиш даш лəвһəлəрдэн мə'лум олмушдур ки, Халдейлəр 1, 2, 3, 4, 5 рəгəмлəрини



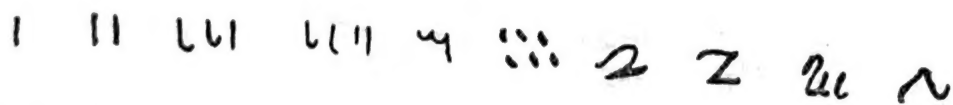
шəклиндə ишарə əдирмишлəр. Нисбəтэн бəйүк сай лазым олмадығындан онлары ишарə əдэн рəгəмлəр олмамышдыр. Əл-чə дə Рома рəгəмлəri аддитив принцип əсасында гурулмушдур. Мəсələn, CXVIII рəгəми „йүз+он+беш+бир+бир+бир“ əдə-дини ишарə əдир. XIX исə XX—I демəкдир.

Чинлилəрин илк рəгəмлəринə аид əлдə кифайəт гəдэр мə-лумат йохдур. Лакин һəмишə Чин рəгəмлəринин шəкиллəри-нин дəйишилдийи мə'лумдур. Бə'зи гəдим Чин китабларында бирдэн доггуза гəдэр рəгəмлəрə



шəклиндə тəсəдүф əдилмишдир. Бурада вертикал хəтлəрин һər бири бир ваһиди үстдэн чəкилэн һоризонтал хəтт исə беш ваһиди кəстəрир.

Мисирлилəр дə бирдэн доггуза кими əдəдлəri белə яз-мышлар:



Юнанлар исə илк дəврлəрдə бир нечə əдəди бармаға охшар вертикал хəтлəрлə кəстəрмишлəр.

Лакин юнан мəдəнийəтинин инкишафындан сонра һəмин үсул дəйишдирилиб һəрфлəр рəгəм еринə ишлəдилмəйə баш-ланмышдыр. Мəсələn, онлар Г (кəһнə П) пинет (йə'ни беш) сə-зүнүн баш һəрфи, Δ (делта) дека (йə'ни он) сəзүнүн баш һəрфи, Н исə һекта (йə'ни йүз) сəзүнүн баш һəрфини 5, 10, 100-үн əвəзинə ишлəтмишлəр. бу үсул эрамыздан ики əср га-баг йəһудилəр тəрəфиндэн дə ишлəдилмишдир.

Тарихən рəгəмлəрин язылышынын бəйүк бир тəкамүл дəв-рү олмушдур. Мисал үчүн хинд рəгəмлəрини кəтүрəк. Аша-ғыдакы үч сəтирдə язылан рəгəмлəр уйгун олараг эрамыздан

эввэл үчүнчү вэ икинчи эсрлөрдө вэ эрамызын биринчи вэ икинчи эсрлөрүндө ишлэдилмишдир:

1	11	+	26	6	3	4	н	т
1	2	4	6	50	50	200	200	200

-	=	+	+	4	7	7	α	α	α
1	2	4	6	7	9	10	10	10	

-	=	≡	+	4	н	+	7	7	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Бэ'зи тарихчилэрин көстөрдиклэринэ көрө һинд рэгэмлэри вэ онлуг сай системи Багдада VIII эсрдэ кечмишдир. Эрэб истиласы заманы (эрэблэрин VIII эсрдэ Испанияя һүчүмү заманы) һәмһин рэгэмлэр вэ онлуг сай системи Авропа өлкэлэринэ яйылмышдыр. Эрэблэр һиндлилэрин ишлэтдийи рэгэмлэри дәйишиксиз гәбул эдэрәк ишлөтмәмишләр. Эрэблэр һинд рэгэмлэрини тәкмилләшдирмиш, кенишләндирмиш, садәләшдирмиш вэ әмәли чәһәтдән даһа әлверишли шәклә салмышлар.

Тәдгигатларын көстөрдийинэ көрө тарихән сыфыр рэгәми һиндлилөрдә олмамышдыр.

Бу да һиндлилэрин рэгэмлэрин мәртәбәлэринэ фикир вермәдиклэрини көстәрир. Сыфыр рэгәмини (0) эрәбләр дахил этмишләр. Эрәбчә сыфыр бош мә'насында ишләдилир. Эрәб китабларыны Авропа диллэринэ (латын вэ испан диллэринэ) тәрчүмә этдикдә „сыфыр“ кәлмәси тәрчүмә олуһан китаблара „*cifra*“ шәклиндә дахил олмуш (Русча „цифры“—сөзү дә бурадан алынмышдыр) вэ ики мә'нада ишләдилмишдир. Хүсуси мә'нада *cifra*—сыфры ишарә әтмәк үчүн, үмүми мә'нада исә рэгәм мә'насында ишләдилмишдир.

Эрәблэрин онлуг сай системи өзүнүн садәлийинә, файдалы олмасына көрә орта эсрлөрдә Авропа өлкәлэриндә ишләдилән бир чох сай системлэрини мәишәтдән сыхышдырыб чыхартмышдыр. Тәхминән орта эсрин ахырларында авропалылар латын рэгэмлэринин мугабилиндә инди ишлөтдийимиз рэгэмлэри эрәб рэгэмлэри адландырдылар. Эрәб рэгэмлэри, бир вэ доггуз рэгәминдән башга мин ил әрзиндә хейли дәйишдирилмишдир.

Әсл эрәб рэгэмлэри: 1 г гн з д 7 v л а

Х эсрдә Авропада ишләнән эрәб рэгэмлэри: 1 2 { \$ 4 v 7 9 0

XV эсрдэ Ав-
ропада ишлэнэн
эрэб рэгэмлэри:
Назырда ишлэ-
нэн эрэб рэ-
гэмлэри:

	2	3	X	7	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Эср Рома рэгэмлэри мүбәһисәлидир. Рома рэгэмлэри һаг-
гында ирәли сүрүлән рәйләрдән һәгигәти ортая чыхартмаг
чәтиндир. Лакин ишләдилән илк үч рэгәм (I, II, III) бармаг-
ларын ишарәси, V рэгәм (беш) элин ишарәси (баш бармаг
бир тәрәфдә, дөрд бармаг исә дикәр тәрәфдә олдугда) вә X
ики V-дән ибарәт олдуғу фикри (яхуд ики элин чарпаз шәк-
ли) инандырычыдыр.

Инди исә натурал әдәдләр үзәриндә һесаб әмәлләринин
(топлама, чыхма, вурма, бөлмә) мәншәиндән бәһс әдәк. Һе-
саб әмәлләри илк дәфә бармаглар васитәсилә әдилмишдир.
Илк дөврләрдә әшя чохлағуны бирләшдирмәк, әшя чохлу-
гундан бир гисм шейләри айырмаг топлама вә чыхма әмәл-
ләринин ән садә үсулу олмушдур.

Вурма әмәли исә бир нечә дәфә (ики дәфә, үч дәфә вә и.
а.) әйни мигдарда көтүрүлән шейләрин бирләшдирилмәси йолу
илә әмәлә кәлмишдир.

Бөлмә әмәлине кәлинчә бу әмәл бир мигдар шейләри бәра-
бәр һиссәләрә (ики һиссәйә, үч һиссәйә вә и. а.) айырмаг йолу
илә әдилмишдир. Сай просесиндә олдуғу кими, һесаб әмәллә-
ринин ишләдилмәсинин илк мәрһәләләриндә дә топлама, чых-
ма, вурма, бөлмә әмәлләринин нәтичәсиндә алынән әдәдин мү-
чәррәд маһийәти, һабелә үзәриндә һесаб әмәлләри апарылан
шейләрин тәбиәтиндән асылы олмамазлыг фикри һәлә ортая
чыхмамышды. Ялныз узун бир тарихи инкишаф йолу кечән
бәшәр дүһасы белә бир факты мейдана чыхартды.

Инсанлар бир груп әйни адлы шейләр үзәриндә бу шейләрин
адыннан асылы олмадан һесаб әмәлләри апармаг вәрдишинә
йийәләндиләр. Мәсәлән, ики шейи үч шейлә бирләшдирдикдә
бунларын ағач, инсан, гуш вә и. а. олмасындан асылы олмая-
раг беш шей әдәчәйи фикри беш әдәдинин мүчәррәд маһий-
йәтини мейдана чыхартды.

Беләликлә, шейләрин тәбиәтиндән асылы олмаяраг онларын
бирләшдирилә вә айрыла билмәси фикри шейләр үзәриндә апа-
рылан илк һесаб әмәлләринин мүчәррәд маһийәти демәк иди.
Риязи фикир инкишафынын бу мәрһәләсиндән башлаяраг әсас
һесаб әмәлләринин (топлама, чыхма, вурма, бөлмә) хассәләри
натурал әдәдләр үзәриндә өйрәнилмәйә башлайыр.

Шейләрин бирләшдирилә вә айрыла билмәси хассәләри өз-
өзлүйүндә натурал әдәдләр үзәриндә апарылан әсас әмәлләрин
чох айдын көрүнән, вәрдиш әдилән бир сыра хассәләринин
мейдана чыхмасына билаваситә көмәк этмишдир. Чәм вә вур-

ма эмәлләринин әсас хассәләри белә хассәләрдәндир (топлананларын ерини дәйишдикдә чәм дәйишмир. Вуругларын ерини дәйишдикдә һасил дәйишмир вә и. а.).

Натурал әдәдләр үзәриндә әдилән һесаб эмәлләринин тә'рифини вермәк үчүн чохлуғлар һаггындакы бә'зи анлайышлара мұрачиәт әтмәлийик.

Чохлуғ анлайышы ән илк анлайышлардандыр. Бир А об'ектинә тә'риф вермәк үчүн ону тәшкил әдән ән бәсит об'ектләри мұәййән әтмәк лазымдыр. Сонра бу бәсит об'ектләри әсас гәбул әтмәк шәртилә верилмиш об'ектин тә'рифи, бәсит об'ектләр васитәсилә верилмәлидир.

Чохлуғ анлайышы ән илк анлайышлардан бири олдуғу үчүн ону даһа бәсит, даһа әзәл олан бир анлайыш васитәсилә ифадә әтмәк гейри-мүмкүндүр.

Ибтидаи инсанларын нәзәриндә һәр шейдән габаг әшя чохлуғу, мәсәлән, һейван сүрүсү, гушларын дәстәси вә и. а. чанланмышдыр.

Чохлуғу әмәлә кәтирән шейләрә онун *элементләри* дейилир. Мәсәлән, охудуғумуз бу сәһифәдәки һәрфләр бир чохлуғдур. Бурада чохлуғун элементләри һәрфләрдир. Әкәр бу сәһифәдәки сөzlәр чохлуғуну нәзәрдән кечирмиш олсаг, башга бир чохлуғ әлдә әтмиш оларыг. Инди бу ени чохлуғун элементләри сөzlәрдир.

Инсан өз әмәли вә зәһни фәалийәтиндә ики вә я бир нечә чохлуғу мұгайисә әтмиш вә бу чохлуғларын элементләри арасында мұәййән уйғунлуғ ярада билмишдир. Мәсәлән, стол әтрафында дуран бир нечә адамла онларын отурмаг истәдикләри стуллар арасындакы уйғунлуғ, һәр бир адама гаршы бир стулун олмасыдыр. Бурада мүмкүндүр ки, һәр бир адама, бир стул вә һәр бир стула бир адам уйғун олар вә белә олдугда адамлар отурдугдан сонра нә стул артыг галар, нә адам. Башга бир һалда адамлар отурдугдан сонра бир стул вә я бир нечә стул артыг гала биләр; я да стул кифайәт әтмәдикдә адамлардан бири вә я бир нечәси аяг үстдә галар. Бу уйғунлуғу зәһни дә яратмаг олар. Биринчи һалда дейирик ки, адамларла стулларын сайы бәрабәрдир. Белә олдугда адамлар чохлуғу илә стуллар чохлуғуна *эйни сайлы чохлуғ* дейилир. Эйни сайлы чохлуғлардан биринчи чохлуғун һәр бир элементинә, икинчи чохлуғун бир элементи вә икинчи чохлуғун һәр бир элементинә биринчи чохлуғун ялныз бир элементи уйғун кәлир. Икинчи вә үчүнчү һалларда исә адамлар чохлуғу илә стуллар чохлуғу эйни сайлы чохлуғлар олмаячагдыр. Бу һалда чохлуғларын бири, е биринин мұәййән һиссәси илә эйни сайлы олачагдыр. Эйни сайлы олмаян ики чохлуғдан биринин элементләринин сайы, о биринин элементләринкиндән чох олачагдыр. Һиссәси илә эйни сайлы олан чохлуғун элементләринин сайы аз, о бири чохлуғунку исә чохдур.

„Бөйүк“¹ сөзүнү риязийятда чохдан бәри $>$ илэ ишарә эдирләр (бу ишарәнин тәрәфләри арасындакы мәсафә бөйүк кәмийәтдән башлаяраг кичийә доғру азалыр). „Кичик“ сөзү исә $<$ илэ ишарә эдирләр (бу ишарәдә исә тәрәфләр арасындакы мәсафә кичикдән бөйүйә доғру артыр).

Мәсәлән, $15 > 7$ дедикдә (из нәзәрдә тутмалыйыг ки, элементләринин сайы 15 олан чохлуг, элементләринин сайы 7 олан чохлугдан бөйүкдүр. Яхуд китабын бир сәһифәсиндәки һәрфләрин сайыны көстәрән чохлуг бүтүн китабдакы һәрфләрин сайыны көстәрән чохлугдан кичикдир.

Чохлугларын мүгайисәси белә яранмыш, тәшәккүл тапмыш вә мүчәррәдләшмишдир. Инсан тәчрүбәсинин мүәййән инкишаф пилләсиндә, верилмиш бир чохлугла бир нечә ардычыл сөз арасында да гаршылыгылы биргиймәтли уйғунлуг яранмышдыр. Сөzlәр бунлардыр: биринчи (бир), икинчи (ики), үчүнчү (үч), дөрдүнчү (дөрд), бешинчи (беш) вә и. а.

Һәр шейин мүгабилиндә дейилән бу сөzlәр һәммин шейин нөмрәси адландырыла биләр.

Беләликлә, верилмиш чохлуғун элементләринин һәр биринә гаршы онун нөмрәсини гойдугда ики һал ола биләр: 1) мүәййән нөмрәдән сонра чохлуғун нөмрәләнәси элементи галмаз; 2) бу нөмрәләмә сонсуз давам әдәр. Биринчи һалда чохлуғун элементләринин сайы сонлудур вә я *чохлуг сонлудур*, икинчи һалда исә чохлуғун элементләринин сайы сонсуздур вә я *чохлау сонсуздур*.

Беләликлә, әшя чохлуғун элементләринә гаршы биринчи натурал әдәддән башлаяраг натурал әдәдләр сырасынын элементләрини гойма просесинә *сай просеси* дейилир. Сай просесинин сонунда дейилән натурал әдәдә *чохлау элементләри сайы* дейилир. Беләликлә, натурал әдәдләр сырасы верилмиш чохлаула мүгайисә әдилә билән һәр бир чохлау әвәз эдир вә әйни заманда натурал әдәдләр сырасы васитәсилә мүгайисә олуан чохлау элементләринин сайыны тәйин эдир. Гәдим заманлардан башлаяраг, бу күнә гәдәр һәятда вә мәишәтдә натурал әдәдләрдән бу мәгсәд үчүн кениш өлчүдә истифадә олунар. Мәсәлән, күчәләрдәки әвләрин нөмрәләнмәси, һәр әвдәки мәнзилләрин нөмрәләнмәси вә и. а. көстәрмәк олар.

Дикәр тәрәфдән чохлау элементләринин сайыны тәйин әдән натурал әдәд, бу чохлау элементләринин сайылмасы нөвбәсиндән асылы дейилдир. Мисал үчүн, охудуғумуз бу сәһифәдәки һәрфләрин учдан тутараг бирбаша нөмрәләнмәсиндән вә әләчә дә сәһифәнин һансы сәтриндән башлаяраг нөмрәләнмәсиндән асылы олмаяраг сәһифәдәки бүтүн һәрфләрин сайы дәйишмәйәчәкдир.

¹ $>$ вә $<$ ишарәләрини илк дәфә инкилис риязийятчысы Гарриот (1560—1621) „*Artis analyticae praxis, est*“ әсәриндә ишләтмишдир.

Сонлу чохлуғларын өзүнә мәхсус бир сыра дахили хассәләри вардыр. Берилмиш ики сонлу чохлуғун һансында элементләрин сайынын чох олмасы суалына чаваб вермәк үчүн я онларын элементләри арасында уйғунлуғ вә я һәр ики чохлуғ илә натурал әдәдләр сырасы арасында уйғунлуғ дүзәлтмәлийик. Мәсәлән, тутаг ки, биринчи чохлуғун элементләри илә 1, 2, 3... , n , натурал әдәдләри арасында гаршылығлы биргиймәтли уйғунлуғ дүзәлдилмишдир, йә'ни биринчи чохлуғун һәр бир элементинә гаршы көстәрилән натурал әдәдләр ичәрисиндә бир әдәд вә тәрсинә һәмин натурал әдәдләрдән һәр биринә гаршы биринчи чохлуғун ялныз бир элементи вардыр.

Һабелә тутаг ки, икинчи чохлуғун элементләри илә 1, 2, 3... , m натурал әдәдләри арасында гаршылығлы биргиймәтли уйғунлуғ дүзәлдилмишдир. Бу һалда әкәр натурал n әдәди m -дән бөйүк оларса, биринчи чохлуғдакы элементләрин сайы икинчи чохлуғдакы элементләрин сайындан чохдур вә я биринчи икинчидән күчлүдүр дейилир. Әксинә, биринчи чохлуғун элементләринин сайы икинчидән аздырса (йә'ни $n < m$ оларса), онда икинчи чохлуғ күчлүдүр.

Әкәр $n = m$ оларса, онда һәр ики чохлуғун күчү эйнидир. Беләликлә, һәмишә ики сонлу чохлуғун күчүнү мүгайисә этмәк үчүн я бу чохлуғларын элементләри арасында вә я бу чохлуғларла натурал әдәдләр арасында гаршылығлы биргиймәтли уйғунлуғ дүзәлтмәк ләзымдыр.

Сонсуз чохлуғларын күчүнү тә'йин этмәк вә я сонсуз чохлуғлары мүгайисә этмәк үчүн эйнилә бу гайдадан истифадә этиәк олар.

Белә бир суал олунур: натурал әдәдләр чохлуғу күчлүдүр, йохса чүт¹ натурал әдәдләр чохлуғу?

Заһирән белә көрүнүр ки, бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу чүт әдәдләр чохлуғундан күчлүдүр, чүнки чүт әдәдләр чохлуғу бүтүн натурал әдәдләр чохлуғуна дахилдир.

Әслиндә сонлу чохлуғларла хас олан белә бир тәклиф сонсуз чохлуғлар үчүн доғру дейилдир. Мәсәлән, тутаг ки, бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots, 2n, \dots \quad (1)$$

илә бүтүн чүт әдәдләр чохлуғу

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2m, \dots \quad (2)$$

мүгайисә олунур. (1) чохлуғунун һәр бир элементини икийә вуруб, (2) чохлуғунун элементләрилә мүгайисә әдәк.

Онда (1) чохлуғунун 1 элементинә гаршы, (2) чохлуғунун 2 элементи (ялныз 2); (1) чохлуғунун 2 элементинә гаршы,

¹ Һәр бир икийә бөлүнән натурал әдәдә чүт бөлүнмәйән натурал әдәд исә тәк әдәд дейилир.

(2) чохлуғунун 4 элементи (ялныз 4) вә и. а. (1) чохлуғунун n элементиңа гаршы, (2) чохлуғунун 2 n элементи дурур вә с.

Эләчә дә (2) чохлуғунун һәр бир элементини 2-йә бөлсәк (1) чохлуғунун бүтүн уйғун элементләрини әлдә этмиш оларыг. Беләликлә, (1) чохлуғунун элементләрилә, (2) чохлуғунун элементләри арасында гаршылыглы биргиймәтли уйғунлуғ ярадылмыш олур. Демәли, бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу илә бүтүн чүт әдәдләр чохлуғу бир күчлүдүр.

Элементи олмаян чохлуға бош чохлуғ дейилир. Бош чохлуғун элементләринин сайыны сыфыр адландырмағы шәртләшәк. Она көрә дә сыфыр һәр бир натурал әдәддән кичикдир, чүнки бош чохлуғдакы элементләрин сайы (элементләр йохдур), бош олмаян (элементли чохлуғ) чохлуғун элементләринин сайындан аздыр.

Әкәр B чохлуғу бош чохлуғдурса (элементсиз чохлуғ) A бош чохлуғ дейилдирсә, онда B чохлуғунун элементләри сайы $b=0$, A чохлуғу элементләринин сайы $a>0$ олур.

Чохлуғларын элементләри сайыны тә'йин этдикдән вә онларын үзәриндә апарылан әсас әмәлләри натурал әдәдләр үзәринә кечирдикдән сонра натурал әдәдләр үзәриндәки әсас әмәлләрин өйрәнилмәсинә кечә биләрик.

1. Топлама вә чыхма

Топлама. Тугаг ки, элементләри ихтияри тәбиәтә малик олан ики чохлуғ верилмишдир. Бунлары A вә B илә көстәрәк. Һәмин чохлуғларын элементләри сайыны көстәрән натурал әдәдләри уйғун олараг a вә b илә, бу ики чохлуғун бирләшдирилмәсиндән алынған чохлуғу $A+B$ васитәсилә, бу чохлуғун элементләринин сайыны $a+b$ илә ишарә әдәк. A чохлуғундан онун C һиссәсинин кәнар әдилмәсини $A-C$ илә, ($a-c$ илә исә A -дан онун һиссәли олуб, сайы „с“ олан C чохлуғуну кәнар этдикдән сонра галан чохлуғун сайыны ишарә әдәк. Бурада + (плюс)¹ топлама ишарәсидир; — (минус)² исә чыхма ишарәсидир. Һәмин ишарәләр XV әсрдә мейдана чыхмыш, XVI әсрдән башлаяраг яйылмышдыр.

Бә'зи риязийят тарихчиләринин яздығына көрә + вә — ишарәләринә илк дәфә Видман Экерин 1489-чу илдә яздығы Арифмет ка³ китабында раст кәлмишләр. Бу ишарәләрин үмүмиййәтлә гәбул әдилмәси үчүн чох вахт лазым кәлмишдир.

¹+ишарәсинин ады латын сөзү олан plus (плюс) сөзүндән алынмышдыр ки, бу да „чох“ (артыг) демәкдир.

²—ишарәси исә латын сөзү олан minus (минус) сөзүндән алынмышдыр ки, „аз“, „азалтма“ демәкдир.

³Sohannes Widman von Eger 1489-чу илдә һесаба анд үч һиссәдән ибарәт бир әсәр язмышдыр. Бу әсәрин үчүнчү һиссәсиндә һәндәсәдән бәһс әдилир.

Бирлэшдирилэн чохлугларын элементлэри сайыны көстэрэн натурал эдэдлэрэ (a -я, b -йә) *топлананлар*, бирлэшдирилмиш чохлугларын элементлэри сайыны көстэрэн натурал эдэдә ($a+b$ -йә) исә бу *топлананларын чәми* дейилир.

Верилмиш топлананлара көрә онларын чәминин тапылма-сына *топлама эмәли* дейилир.

Айдындыр ки, чәм эмәлини бу гайда илә тә'риф этдикдән сонра ялныз ики топлананын дейил, үч, дөрд, беш вә с. бир нечә топлананларын да чәмини тапмаг олар. Чәми, садәчә верилән чохлугларын элементләрини саймагла да тапмаг олар. Лакин чох вахт элә чохлугларын чәмини тапмаг лазым кәлир ки, бу чохлуглардан бири, бир нечәси вә я һеч бири сай процесиндә билаваситә иштирак этмәйәрәк, долайы йолла фикирдә мә'лум олур.

Тутаг ки, бир ери шумламаг үчүн нечә адам лазым олду-гуну тапмаг истәйирик. Бунун үчүн адамлары бир сырая топ-лайыб, сонра саймаг әлверишли вә бә'зән мүмкүн олмур.

Белә олдугда адамларын еринә чубуглар вә я торпаг үзә-риндә чәкилән излэри көтүрмәк олар вә бунунла да ери шум-ламаг үчүн нечә адам лазым кәлдийини мүәййән этмәк олар.

Топлама эмәли ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1. Айдындыр ки, $A+B$ вә $B+A$ чохлуглары мүхтәлиф дейил әйни чохлуглардыр. Она көрә дә һәмин чохлугларын элементләринин сайы да әйни олмалыдыр. Беләликлә $a+b = b+a$ олмалыдыр¹, йә'ни *топлананларын ери дәйишдикдә чәм дәйишмәз*. Эләчә дә бир нечә топлананлар үчүн һәмин хассәләрин доғрулуғуну көстәрмәк олар. Чәмин бу хассәсинә *ердәйишмә* вә я *коммутативлик* хассәси дейилир.

2. Тутаг ки, үч ихтияри A , B , C сонлу чохлуглары верил-мишдир. Бу үч чохлуғу мүхтәлиф гайда илә бирлэшдирмәк олар: A -ны B илә бирлэшдириб, алынан чохлуғу C илә; вә я B -ни C илә бирлэшдириб, алынан чохлуғу A илә бирлэшдир-мәк олар (даһа башга йолла да бирлэшдирмәк олар). Чохлуг-лары бирлэшдирмә гайдасыны бир-бириндән айырдыр этмәк үчүн мә'тәризә ишарәсиндән истифадә этмәк олар. Бу ишарә XVII әср-дән башлаяраг ишләдилмәкдәдир. Мәсәлән, бу бирлэшдирмәни $(A+B)+C$ шәклиндә яздыгда, әввәлчә A илә B -нин бирлэш-дирилдийи (топландығы) сонра исә алынан чәм илә C -нин бирлэшдирилмәси дүшүнүлмәлидир.

$A+(B+C)$ шәклиндә яздыгда исә әввәлчә B илә C -нин бир-лэшдирилдийи (топландығы), сонра исә A -нын үзәринә бу чох-луғун элавә олундуғу дүшүнүлмәлидир.

¹ Бурада=ишарәси бәрабәрлик ишарәси олуб XVI әсрдән әтибарән+вә—ишарәләриндән сонра ишләнмишдир. Илк дәфә һәмин ишарә инкилис һәндәсәчиси Рекорд (Record) тәрәфиндән „Artis of wit“ (Әглин дирәйи) кита-бында ишләдилмишдир.

Бу ики чохлуғун сайынын бәрабәр олдуғуна чох асанлыгла йәгин этмәк олар. Бу чохлуғларын элементләри сайынын $(a+b)+c$ вә $a+(b+c)$ илә ифадә олуначағы айдындыр. Демәли,

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

олмалыдыр.

Натурал әдәдләрин бу хассәсинә *групишдырма* вә я *ассоциативлик* хассәси дейилир.

3. Инди һәр һансы A чохлуғуну бош чохлугла бирләшдирәк. A чохлуғунун элементләри сайыны a , бош чохлуғун элементләри сайыны 0 (сыфыр) илә кәстәрәк. Онда топламанын тәрифинә кәрә $a+0=a$ олар, чүнки A чохлуғуну бош чохлугла бирләшдирсәк A чохлуғунун элементләри үзәринә һеч бир элемент әлава олунмаз.

Чыхма. Инди чыхма әмәлинин хассәләрини өйрәнәк.

Биз юхарыда чыхма әмәлини, верилмиш чохлуғдан онун бир һиссәсинин кәнар әдилмәси кими гейд этдик. Мәсәлән, әрик ағачындан дәймиш әрикләр дәриләрсә, ағачдакы әрикләр чохлуғундан дәймиш әрикләр кәнар әдилмиш олар, йә'ни, әрик ағачындакы әрикләр чохлуғунун бир һиссәси кәнар әдилмиш олур. Белә бир мәсәлә мейдана чыхыр: чохлуғун элементләри вә бу чохлуғун кәнар әдилән һиссәсиндәки элементләрин сайыны билдикдә галыг чохлуғун элементләри сайыны тапмалы.

Айдындыр ки, галыг чохлуғун элементләрини садәчә саймагла тапмаг олар. Мәсәлән, әрик ағачында беш йүз әрик вардырса, онун үч йүзү дәрилдикдән сонра ики йүз әрик галачағыны садәчә йәгин этмәк олар.

Лакин галыг чохлуғу саймаг чох вахт имкан харичиндә олур. Она кәрә дә саймаяраг галыг чохлуғун элементләринин сайыны тәйин этмәйи бачармаг лазымдыр.

1. Әкәр A чохлуғундан онун бүтүн элементләри кәнар әдиләрсә, мәсәлән, ағачдакы бүтүн әрикләр дәриләрсә, $A-A$ галыг чохлуғу бош чохлуғдан ибарәт олачагдыр (ағачда әрик галмаячагдыр). Тутаг ки, A чохлуғунун элементләринин сайы a , онун һиссәси олан B чохлуғунун элементләринин сайы b -дир. A чохлуғундан B чохлуғуну айырдыгдан сонра онун галан элементләринин сайына натурал a вә b әдәдләринин *фәрги* дейилир вә бу да $a-b$ шәклиндә ишарә әдилир.

Фәргин тапылмасы әмәлине *чыхма әмәли* дейилир.

$a-a=0$, $a-0=a$ вә $0-0=0$ олдуғу айдындыр. Бурада чыхма әмәлинин мүмкүн олмасы үчүн һәмишә чыхылан (b), азаландан (a) кичик олмалыдыр.

Инди чыхма әмәли илә топлама әмәли арасындакы әлагәни кәстәрәк.

2. Әкәр A чохлуғундан онун һиссәси олан B -ни кәнар әдиләрсә, кәнар әдилән чохлуғу енидән галыг чохлугла бирләшдирсәк A чохлуғу алыныр, чүнки, бу һалда A чохлуғу үзәринә

кəнардан элемент əлавə олунмур, кəнар əдилən элементлэр исə енидэн A —чохлуғуна гайтарылыр. Она көрə дə

$$(a-b)+b=a$$

олур. Бурадан көрүнүр ки, чыхма əмəли топлама əмəлинин тəрсидир. Доғрудан да $a-b$ илə b -нин топланмасы a -дан, b -нин чыхылмасы əмəлини йох əдиб a -ны бəрпа əдир вə я a əдəдинин үзəринə d əдəди кəлсək, сонра исə алынан əдəддэн d -ни чыхсаг енə дə a əдəдини аларыг:

$$a+d-d=a.$$

Демəли, топлама əмəли дə чыхма əмəлинин тəрсидир. Бир сөзлə топлама вə чыхма əмəллəri гаршылыглы тəрс əмəллəрдир. Белəликлə, чыхма əмəли, топлананлардан бири вə чəм мə'лум олдугда дикəр топлананы тапмаг əмəлиндэн ибарəтдир. Бурада чəмə—азалан; мə'лум топланана—чыхылан, ахтарылан топланана исə фəрг дейилир.

3. Бə'зэн верилмиш A чохлуғундан онун бир B һиссəсиндэн əлавə башга бир C һиссəсинин дə кəнар əдилмəsi лəзым кəлир. Мəsələn, мин эрийи олан ағачдан əввəлчə үч йүз эрик, сонра даһа ики йүз эрик дəрилмишдир.

Бу мəsələни ики чүр һəлл этмək олар:

Əввəлчə A чохлуғундан онун һиссəsi олан B -ни чыхмаг, алынан галыг чохлуғдан енидэн C -ни чыхмаг олар. Бу əмəли $(A-B)-C$ шəклиндə яза билəрик. Бундан башга B чохлуғуну C —чохлуғу илə бирлəшдириб A -дан кəнар этмək олар.

Бу əмəли исə ардычыл олараг

$$A-(B+C)$$

шəклиндə язмаг олар. Һəмин чохлуғларын элементлəri сайына кечсək, биринчи һалда

$$(a-b)-c,$$

икинчи һалда исə

$$a-(b+c)$$

натурал əдəдлəрини əлдə əдирик.

Белə мəsələləri һəлл этмək үчүн кэрək B вə C чохлуғлары бирликдə A -нын һиссəsi олмалыдыр. Һэр ики үсулда A -дан эйни сайда элемент кəнар əдилдийинə көрə

$$(a-b)-c=a-(b+c)$$

олмалыдыр, йə'ни, чəми чыхмаг əвəзинə, айры-айры топлананлары чыхмаг вə тəрсинə, айры-айры топлананлары чыхмаг əвəзинə онларын чəмини чыхмаг кифайəтдир. Белəчə дə ағачдакы мин эрикдэн əввəлчə үч йүз, сонра ики йүз эрик дəрсək, вə я бир дəфəлик ағачдан беш йүз эрик дəрсək, ағачда беш йүз эрик галачағыны садəчə саймагла йəгин этмək олар.

4. Инди исə чəмдэн чыхмаг мəsələсини нəзəрдэн кечирək. Тутаг ки, гызыл күл ағачында биринчи күн он гөнчə вардыр. Сəһəri исə даһа беш гөнчə ачылмышдыр. Сонра үч гөнчə

дәрилмишдир. Айдындыр ки, үч гызыл күл әввәлчә ачылмыш 10 гызыл күлдән, я сонра ачылмыш беш гызыл күл ичәрисиндән дәрилә биләр вә я фәргинә вармадан ағачда олан бүтүн ачылмыш гызыл күлләр ичәрисиндән (ағачда он беш гызыл күл ачылмышдыр) үчүнү дәрмәк олар. Бу дедикләримизи үмумиләшдирсәк белә гейд әтмәк олар. A вә B чохлуглары бирләшдирилдикдән (бир ерә топладыгдан) сонра алынан чохлугдан A -нын вә B -нин һиссәси ола билән бир C чохлугуну ашағыдакы үч гайда илә кәнар әтмәк олар:

$$1. A + (B - C)$$

$$2. (A - C) + B$$

$$3. A + (B - C)$$

Айдындыр ки, бурада һәр үч һалда ердә A вә B чохлугларынын, C -йә дахил олан элементләриндән башга элементләри галачагдыр. Она көрә дә әкәр A , B , C чохлугларынын элементләри сайы уйғун олараг a , b , c , оларса онда:

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$$

алыначагдыр.

Әләчә дә гызыл күл ағачындан күл дәрилдикдә ағачда галан гызыл күлүн сайы үч һалда бәрабәр олачагдыр.

5) Тутаг ки, A чохлугундан C чохлугу кәнар әдилмиш B чохлугунун (C чохлугу B -нин һиссәсидир) элементләринин кәнар әдилмәси арзу олунур. Айдындыр ки, C чохлугу кәнар әдилмиш B чохлугунун элементләри $(B-C)$ чохлугунун элементләриндән ибарәтдир. Онда A чохлугундан C чохлугу кәнар әдилмиш B чохлугунун элементләрини кәнар әтсәк

$$A - (B - C)$$

чохлугуну әлдә әдирик.

Бу иши башга чүр дә әтмәк олар. Әввәлчә A чохлугундан B -нин бүтүн элементләрини кәнар әдиб, алынан чохлугу C чохлугу илә бирләшдирә биләрик. Айдындыр ки, һәр ики һалда A чохлугундан B -нин әйни элементләрини кәнар әтмиш оларыг. Галыг чохлуглар һәр ики һалда әйни элементләрдән ибарәт олар. Она көрә дә әкәр A чохлугунун элементләринин сайы a , B -нинки b вә C -нинки c оларса, онда

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

олар.

2. Вурма вә бөлмә

Вурма. Сайлары әйни олан ики вә бир нечә чохлугу нәзәрдән кечирәк. Тутаг ки, бир хиябанда һәр сырада он беш ағач олмагла үч сыра ағач әкилмишдир. Демәли, бурада һәр рәсиндә он беш элемент олан үч чохлуг верилмишдир. Бу чохлуглары бирләшдирсәк ени чохлуг әлдә әтмиш оларыг. Ени чохлугун нечә элементи олачағыны тапмаг тәләб олунур.

Ашкардыр ки, ени чохлуғун элементләринин сайы
 $15+15+15$

олачагдыр.

Чох вахт элементләринин сайы бəрəбəр олан үч чохлуғ дейил, даһа чох сайда чохлуғу бирлəшдирмəк тəлəб олунур. Бу һалда ени чохлуғун элементлəри сайыны чəм ишарəси вəситəсилə узун-узады язмағ лəзым кəлдийиндэн дикəр ишарə, йə'ни вурма ишарəси ишлəдилир.

Вурма ишарəси (·) нөгтə вə я (x)¹ шəклиндə язылыр. Нөгтə шəклиндə вурма ишарəси XVII əсрдə мейдана чыхмыш, лəкин бунун ишлəдилмəсиндə узун заман тəрəддүд кəстəрилмишдир.

Демəли, $15+15+15=15\cdot3$ (вə я 15×3) шəклиндə язылмадыр.

Белəликлə, вурма əмəли бəрəбəр топлананларын чəминдэн ибарəтдир. Бу һалда, тəкрар əдэн топланана *вурулан*, топлананларын сайына исə *вуран* дейилир. Вурулан вə вурана бирликдə *вуруглар* да дейилир. Вурмадан сонра əлдə əдилэн əдəдə исə *һасил* дейилир. Демəли, мə'лум вуруглара кəрə һасилин тапылмасына *вурма əмəли* дейилир.

Вурма əмəлинин дə бир сыра мүһүм хассəлəри вардыр. Бу хассəлəр ашағыдакылардыр:

Һәр чəркəдə a шитил

ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ

b чəркə

1-чи шəкил

1) Вуругларын ери дəйишдикдə һасил дəйишмəз.

Тутаг ки, *a* вə *b* ихтияри ики натурал əлəддир. *a*-ны, *b*-йə вурмағ *a*-ны *b* лəфə өз-өзү илə топламағ демəкдир. Тутаг ки, бир лəкдə һər бириндə *a* гəдər шитил олан *b* чəркə шитил əкилмишдир (1-чи шəкил).

¹ Вурма ишарəси (·) шəклиндə XVII əсрин икинчи ярында Лейбнис тəрəфиндэн ишлəдилмишдир.

Вурма əмəлинин X ишарəси исə (Oughtred) Оутретин риязийят китабында ишлəдилмишдир.

Айдындыр ки, ләкдә әкилән бүтүн шитилләрин сайы $a \cdot b$ олачагдыр. Шитилләрин сайыны белә һесабладыгда чәркәләри һоризонтал золаглар үзрә һесабладыг (b чәркә) вә һәр чәркәдә a гәдәр шитил олдуғуну нәзәрә алдыг. Инди исә вертикал зоаглары чәркә һесап әдиб (белә чәркәләрин сайы a -дыр), һәр чәркәдә b шитил олдуғуну нәзәрә алсаг, ләкдә олан шитилләрин сайынын $b \cdot a$ олачағыны көрәрик. Демәли,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

олмалыдыр; бурада a , b ихтияри натурал әдәдләрдир.

2) Инди исә натурал әдәдләри вурма әмәлинин пайлама ганунуна (дистрибутивлик ганунуна) табе олдуғуну изаһ әдәк.

Тутаг ки, a , b , c ихтияри үч натурал әдәддир.

Онда
$$a \cdot (b + c) = ab + ac \quad (3)$$
 олар.

Һәмин бәрәбәрлийин доғрулуғуну исбат әтмәк үчүн енә дә, a чәркә вә һәр чәркәдә b вә c гәдәр шитил олдуғуну көтүрәк. Әввәлчә (3) формулунун сол тәрәфинин доғрулуғуну изаһ әдәк.

2-чи шәкилдә көстәрилдийи кими, һәр квадрата бир шитил, һәр шитилә бир квадрат уйғундур. Һәр чәркәнин биринчи

	Һәр чәркәдә b шитил						Һәр чәркәдә c шитил		
	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
a чәркә	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

А

2-чи шәкил

һиссәсиндә b гәдәр шитил, икинчи һиссәсиндә исә c гәдәр шитил вардыр. Чәркәләрин бу ики һиссәсини бир-бириндән AB мәрзи айырыр. Әкәр AB мәрзини ләғв әтсәк онда һәр сәтирдә $b + c$ шитал олур. Бүтүн ләкдә исә $a(b + c)$ шитил олур.

Инди AB мәрзиндән солда вә сағда нечә шитил олдуғуну тапаг. AB мәркәзинин солунда a чәркә, һәр чәркәдә исә b гәдәр шитал вардыр. Онда AB мәрзиндә солда $a \cdot b$ гәдәр шитил олачаг. AB мәрзинин сағында исә a чәркә, һәр чәркәдә

исә c гәдәр шитил вардыр. Онда AB мәрзиндән сагда чәми $a \cdot c$ гәдәр шитил олачагдыр. AB мәрзини ләгв этдикдә, айдындыр ки, һәр ики һиссәдә $ab+ac$ гәдәр шитил олачагдыр. AB мәрзини ләгв этдикдә кәнардан шитил элавә олунмадығындан вә шитилләр азалмадығындан

$$a \cdot (b+c) = ab+ac$$

олмалыдыр.

3) Натурал әдәдләри вурма әмәли группашдырма (ассосиативлик) ганунуна табедир.

Билирик ки, натурал әдәдләри вурма әмәли ердәйишмә ганунуна табедир.

Юхарыда көстәрилән шәкилдә (1-чи шәкил) һәр шитил бир квадратда әкилмиш вә һәр квадратда бир шитил олдуғуну фәрз этмишдик. Демәли, 1-чи шәкилдә бу гайда илә бүтүн квадратларла шитилләр арасында гаршылыглы бир гиймәтли уйғунлуг ярадылмышдыр. Белә олдугда һәр чәркәдә a квадрат, b чәркәдә исә $a \cdot b$ квадрат олачагдыр.

Тутаг ки, инди һәр квадратда c гәдәр шитил вардыр, онда бир чәркәдә $a \cdot c$ шитал, b чәркәдә исә $(a \cdot c) \cdot b$ шитил олачагдыр. Һәмин шитилләрин сайыны дикәр тәрәфдән дә белә һесаблая биләрик.

Шәртә көрә һәр квадрата c шитил санчылмышдыр. Әкәр һәр чәркәдә a шитил олмагла, һәр квадратда бир шитил санчылса иди, онда элавә $(c \cdot b)$ чәркәлазым кәләрди.

Демәли һәр чәркәдә a гәдәр шитил олдуғундан бүтүн шитилләрин сайы $a \cdot (c \cdot b)$ олмалыдыр. Кәнардан һеч бир шитил элавә әдилмәдийиндән вә санчылан шитилләрин һеч бири атылмадығындан һәр ики гайда илә һесабланан шитилләрин сайы бәрабәр олмалыдыр, йә'ни:

$$(a \cdot c) \cdot b = a \cdot (c \cdot b).$$

Юхарыда вурма әмәлинин тә'рифини вердикдә дедик ки, вурма әмәли, элементләринин сайы бәрабәр олан чохлугларын чәминдән ибарәтдир. Мисал үчүн: $25 \cdot 3 = 25 + 25 + 25$, $25 \cdot 2 = 25 + 25$ вә и. а.

Демәли верилмиш a натурал әдәдини b натурал әдәдинә вурмаг a -ны b дәфә өз-өзү илә топламаг демәкдир. Вураны бир ваһид азалтдыгда һасил дә вурулан гәдәр азалыр.

Бурада $b=1$ олан һал мүстәснадыр, чүнки a -ны бир дәфә тәкран әдәрәк өзү илә топламаг мүмкүн дейилдир. Она көрә дә $a \cdot 1 = a$ гәбул әдилмәлидир.

Сыфры мүйәйән натурал әдәдә вурмаг, сыфры һәмин натурал әдәд дәфә өз-өзү илә топламаг демәк олдуғундан:

$$0 \cdot a = \underbrace{0+0+0+\dots+0}_{a \text{ дәфә}} = 0$$

олмалыдыр.

Инди исэ мүййән a эдэдинин сыфра вурулмасы гайдасын-
дан бәһс эдәк. Асанлыгла

$$a \cdot (b - c) = ab - ac$$

олдуғуну йәгин эдә биләрик. Бурада b -нин c -дән бөйүк олдуғу
фәрз эдилир.

$$b = c + 1 \text{ олдугда}$$

$$a \cdot 1 = a \text{ алыныр.}$$

Инди $b = c$ фәрз эдиб $a \cdot (b - b) = a \cdot 0 = 0$
олдуғуну гәбул эдәк.

Беләликлә, натурал эдәдләри вурма әмәлинин тә'рифини
вердикдә, һәмин тә'рифә һәр бир натурал эдәдин ваһидә вә
сыфра вурулмасы тә'рифини дә әлавә этмәлийик.

Ваһидә вә сыфыра вурманы белә тә'риф этдикдә вурманын
табе олдуғу бүтүн хассәләрин өдәнилдийини йохламаг чәтин
дейилдир:

1. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
2. $a \cdot (b \cdot 1) = (a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b$
3. $(a + b) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b$

Эләчә дә сыфыра вурдугда һәмин хассәләр өдәнилик:

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
2. $a \cdot (b \cdot 0) = (a \cdot b) \cdot 0 = 0$
3. $(b + c) \cdot 0 = b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Биз натурал эдәдләр үзәриндә эдилән әмәлләрин табе олду-
ғу бир ганунун бүтүн натурал эдәдләрә хас олдуғуну нүма-
йиш этдирмәк мәгсәдилә айры-айры натурал эдәдләрдән дейил
(мәсәлән 3, 5, 9 вә с.) ихтияри көтүрүлә билән натурал эдәдләр-
дән истифадә этдик. Белә натурал эдәдләри a , b , c вә и. а. кими
һәрфләрлә көстәрдик. Бу гайда илә янашараг, сыфыр да да-
хил олмагла, бүтүн натурал эдәдләрин үзәриндә эдилән топ-
лама вә вурма әмәлләринин ашағыдакы хассәләрә малик ол-
дуғуну сүбүт этдик:

1. $a + b = b + a$
2. $a \cdot b = b \cdot a$
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
5. $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Бөлмә. Инди исэ натурал эдәдләрин үзәриндә апарылан
бөлмә әмәлиндән бәһс эдәк. Бөлмә әмәлинин мәншәи тарихи
чох гәдимдир. Натурал эдәдләр үзәриндә эдилән вурма әмәли-
лә янашы мүййән бир әшя чохлуғуну бир нечә бәрабәр
һиссәйә айыра билмәк кими мәсәләләрин һәлли дә чох гәдим
заманларда лазым олмушдур. Әввәлләрдә бир йығын әшяны
ики вә я үч бәрабәр һиссәйә айырмаг үчүн һәмин әшяны
бир-бир айырыб, айры-айры ики вә я үч ерә йығырдылар.
Беләликлә, верилмиш әшя чохлуғуну ики вә я үч бәрабәр һис-

сәйә айырыб һиссәләрдән һәр бирини сайырдылар. Элә бу заман чохлуғун ики бәрабәр һиссәйә айрылмадығы һалларына тәсадүф эдилмиш вә белә мәсәләләр һәлл эдилмәмиш галмышдыр. Верилмиш чохлуғун элементләри сайыны вә онун нечә бәрабәр һиссәйә айрылачағыны биләрәк һәр һиссәнин элементләри сайыны тә'йин этмәк кими мәсәлә бөлмә әмәлиһә аид бир мәсәләдир. Лакин бөлмә әмәлиһә аид белә бир мәсәлә дә нәзәри чәлб этмишдир.

Верилмиш чохлуғун элементләри сайыны вә онун айрылдығы бәрабәр һиссәләрдәки элементләрин сайыны биләрәк, һәм һәр бәрабәр һиссәләрин элементләри сайыны тә'йин этмәк. Бөлмә әмәлиһә аид бу ики мәсәләни изаһ әдәк.

Тутаг ки, 12 шитили һәр чәркәдә бәрабәр мигдарда шитил олмагла үч чәркәдә санчмаг лазымдыр. Әввәлләрдә бу кими мәсәләни белә һәлл эдирдиләр: 12 шитилдән һәр чәркәйә бир шитил санчырдылар. 12 шитил гуртардыгдан сонра һәр чәркәдәки шитили сайырдылар.

Инди тутаг ки, 12 шитил вардыр. Бу шитилләри һәр чәркәдә дөрд шитил олмагла нечә чәркәдә әкмәк олар? Бу мәсәләни исә белә һәлл эдирдиләр.

Әввәлчә 12 шитили дөрд-дөрд айырырдылар. Сонра һәр бириндә дөрд шитил олан нечә һиссә алындығыны саяраг үч чәркә лазым олдуғуну мүйәйән эдирдиләр.

Бу ики мәсәләни вурма әмәлинин көмәйи илә бир мәсәләйә кәтирмәк олар. Биринчи мәсәләдә 12 шитилин үч чәркәдә санчылмасы тәләб эдилирди. Һәр чәркәдә нечә шитил олачағы сорушулур вә һәр чәркәдә дөрд шитил олачағы тә'йин эдилирди. Демәли, $4 \cdot 3 = 12$ олмалыдыр. Икинчи мәсәләдә исә һәр бириндә дөрд шитил олмагла 12 шитилин нечә чәркәйә әкилә биләчәйи сорушулур вә үч чәркә лазым олдуғу мүйәйән эдилирди. Демәли $4 \cdot 3 = 12$ олмалыдыр.

Биринчи мәсәләдә һасил (12) вә вуран (3) мә'лум икән вурулан (4) тапылырды. Икинчи мәсәләдә исә һасил (12) вә вурулан (4) мә'лум икән вуран (3) тапылырды. Беләликлә, һәр ики мәсәләдә һасил вә вуруглардан бири мә'лум икән икинчи вуруг ахтарылырды.

Она көрә дә юхарыдакы ики мәсәләни бир бөлмә мәсәләсинә кәтирә биләрик: һасил вә вуруглардан бири мә'лум икән икинчи вуруг тапмалы. Мә'лум бир әдәди диһәр мә'лум бир әдәдә бөлмәк, элә үчүнчү бир әдәд тапмаг демәкдир ки, бу үчүнчү әдәди мә'лум икинчи әдәдә вурдугда мә'лум биринчи әдәд алынсын. Бурада биринчи мә'лум әдәдә бөлүнән, икинчи мә'лум әдәдә бөлән; ахтарылан әдәдә исә *гисмәт* дейилир. Гисмәтин тапылмасы әмәлиһә бөлмә әмәли дейилир. Бөлмә әмәли ики нөгтә илә ишарә эдилир вә үмумийәтлә, белә язылыр:

$$a : b = c.$$

Биринчи мәсәләдә бөлмә белә язылмалыдыр:

$$12 : 3 = 4.$$

Бөлмә ишарәси (:) XVII әсрдә¹ мейдана чыхмыш вә сон-
ралар даимиләшмишдир.

Бөлмә әмәли вурма әмәлинин тәрсидир. Ики әдәди әввәлчә
бир-биринә вуруб, сонра онларын һасилини вуруглардан бири-
нә бөлсәк, о бири вуруг алынар.

Бурадан көрүнүр ки, вурма әмәлиндә вуран вә вурулан
мә'лум олдуғу һалда һасил ахтарылыр. Бөлмә әмәлиндә исә
һасил вә вуруглардан бири мә'лум икән о бири вуруг тапылыр.
Вурма әмәли дә бөлмә әмәлинин тәрсидир. Гисмәти бөләнә
вурдугда бөлүнән алыныр. Она көрә дә вурма вә бөлмә әмәл-
ләри гаршылыглы тәрс әмәлләрдир.

Бөлмә әмәлиндә вурмая аид олмаян бә'зи хусусийәтләр вар-
дыр:

1) һәр бир натурал әдәд 1-ә бөлүнүр, гисмәт исә бу әдә-
дин өзүнә барабәр олур; $a : 1 = a$, чүнки $a \cdot 1 = a$ -дыр.

2) натурал әдәдләр сырасына сыфры да дахил әтсәк, сыф-
рын ихтияри натурал әдәдә бөлүндүйүнү һөкм әдә биләрик:

$$0 : a = 0, \text{ чүнки } a \cdot 0 = 0.$$

Лакин һеч бир натурал әдәд сыфра бөлүнмүр.

Әкәр $a : 0 = b$ олса иди, онда $0 \cdot b = a$ олмалы иди. Бу исә
мүмкүн дейилдир, чүнки $0 \cdot b = 0$.

3) $(a + b) : c = a : c + b : c$

Бу хассәнин доғрулуғуну исбат әдәк. Тутаг ки,

$$(a + b) : c = d$$

онда

$$a + b = c \cdot d$$

олмалыдыр. Фәрс әдәк ки:

$$a : c = d_1 \quad b : c = d_2.$$

Онда

$$a = c \cdot d_1. \quad b = c \cdot d_2$$

олачагдыр. Бурадан

$$a + b = cd_1 + cd_2 = c(d_1 + d_2)$$

алынар. Демәли,

$$c \cdot d = c(d_1 + d_2)$$

вә я

$$d = d_1 + d_2 = a : c + b : c$$

олмалыдыр. Йә'ни,

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Әләчә дә,

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

олдуғуну йәгин әдә биләрик.

¹ (:) ишарәси илк дәфә XVII әсрдә никилисләр тәрәфиндән ишлә-
дилмишир. Эһтимал ки, Лейбинс бу ишарәни ишләдәркән (1684) никилис
мәнбәләрдән көтүрмүшдүр.

3. Сай системлэри

Эдэдлэрин дүзкүн, биргиймэтли охунмасы вэ язылмасы кими мäsэлэлэр дэ гэдим мäsэлэлэрдэн биридир. Экэр һэр бир эдэдэ Халдейлэрдэ вэ башга гэдим халгларда олдуғу кими айрыча ад верилсэ вэ язылса иди онлары ядда сахламаг вэ язмаг имкан харичиндэ оларды. Гинд позисион¹ системинин яранмасы эдэдлэр һаггындакы фикир инкишафынын эн царлаг гэлэбэлэриндэн биридир. Бу системдэ әсас мэгсэд һэр бир натурал эдэди он рэгэм:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 васитәсилә ифадә этмәкдир.

Ихтияри натурал эдэди язмаг вэ охумаг үчүн истифадә эдилән ад вэ рэгэмлэр күллүсүнә нөмрәләмә дейилир.

Бәс он рэгэм васитәсилә ихтияри натурал эдэди язмаг нечә мүмкүн олмушдур?

Бир нечә шейи саймаг лазым кәлдикдә илк заманларда онлары он-он топалара айырмышлар. Мүмкүндүр ки, һәрәсиндә он шей олан бир нечә топадан сонра ердә бир онлуг әмәлә кәтирмәйән бир нечә шей галсын. Экэр айрылан шейләр ичәрисиндә дөрд дәнә онлуг топа вэ әлавә үч шей вардырса, бу шейлэрин үч ваһид вэ дөрд онлугдан ибарәт олдуғуну һөкм эдирдиләр. Экэр онлуг топаларынын сайы чох олмуш олсайды, шейләри һәрәсиндә йүз дәнә олмагла топалара айырырдылар. Бу һалда бир топада йүздән аз шей галдыгда һәмин топаны һэр бириндә енидән он шей олмагла кичик топлара айырмаг лазым кәлирди. Бу исә олдуғу кими әввәлдәки гайда илә эдиләрди. Ашкардыр ки, бу гайданы давам этмәк олар. Мүасир дилдә һәмин просеси белә кәстәрә биләрик.

Тутаг ки, мүәйән чохлуғу юхарыдакы гайда илә айырдыгда a_1 тәклик, a_2 онлуг, a_3 йүзлүк, a_4 минлик вэ и. а. вардыр.

Онда һәмин чохлуғу N илә ишарә этсәк:

$$N = a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^3 + \dots + a_n \cdot 10^{n-1} \quad (4)$$

аларыг. Бу эдэди белә язмағы шәртләшәк:

$$N = a_n \dots a_4 a_3 a_2 a_1. \quad (5)$$

Мәсәлән, сайыласы шейләр дөрд онлугдан, үч тәкликдән ибарәт олмуш олсайды онда $a_1=3$, $a_2=4$ оларды вэ һәмин шейлэрин сайыны $a_2 a_1$ вэ я 43 кими язардыг. Бурада тәкликлэрин сайына (a_1) биринчи мәртәбә ваһидләри, онлугларын сайына (a_2) икинчи мәртәбә ваһидләри, йүзлүклэрин сайына (a_3) үчүнчү мәртәбә ваһидләри вэ и. а. дейилир.

Ики ян-яна язылан рэгэмлэрдән солдакы, сағдакындан ондәфә бөйүк ваһидләри ифадә эдир. Беләликлә нәинки языл-

¹ Positio (позисио) латынча позиси, „membre“ „ер“, вәзийәт демәкдир.

мыш рэгәмин өзүнүн эйни заманда онун язылдыгы мөвгеинин дә әһәмийәти вардыр. Она көрә дә һәмин системә „мөвге“ *системи* дейилир. Онлуг системиндә он әдәди хусуси әһәмийәтә малик олуб, она системин „әсасы“ дейилир. Бу сай системинин заһирн садәлийинә бахмаяраг узун бир тарихи инкишафын мәһсулудур. Онун яранмасы вә инкишафында бир чох халглар биркә сә'й вә ярадычылыгларыны әсиркәмәмишләр.

Тәбин олараг белә бир суал мейдана чыхыр, нә үчүн сай системиндә он әдәди әсас көтүрүлмүшдүр?

Белә күман әдилир ки, сай просесиндә әл бармагларындан истифадә олундуғундан ики әлимиздәки он бармаг сай системинин әсасы дейә гәбул әдилмишдир. Лакин бир сыра халгларда беш-беш, ийирми-ийирми сай сөзләринә раст кәлмәк олар. Мәсәлән, франсызча 80, „*quatre-vingt*“— 4×20 (дөрд ийирми) демәкдир. Он ики—он ики (Дүжин). Алтмыш-алтмыш. Һәтта он бир-он бир (Ени Зеландия) сай системинә дә раст кәлмәк олур.

Бу көстәрир ки, мүхтәлиф халгларда сай системинин әсасында ялныз 10 дейил, башга сайлар да көтүрүлмүшдүр.

Игтисади мүнәсибәтләрдә вә мүнәрибәләрдә, халглар бир-биринә әдәдләрин ишарә вә я дейилиш гайдасыны яймыш вә нәтичәдә даһа мүнәсиб сөзләр сечилмишдир. Бу фикри изаһ этмәк үчүн мүхтәлиф халгларда эйни сай адларынын олмасы бир халгдан дикәр халга мүнәсиб сай адынын кечмәси фикринә мисал ола биләр. Мәсәлән, два (русча), ду (фарсча) *dua* (санскритчә)¹, био (юнанча), *duo* (латынча), *two* (инкилисчә) вә и. а. көстәрмәк олар. Эләчә дә онлуг сай системи бир чох халглар арасында мүштәрәк сай системи гәбул әдилмиш вә мүнәфизә олунмушдур. Позисион онлуг сай системи тәгрибән 2 мин ил бундан әввәл һиндлиләрә мә'лум иди. Авропая бу системи әрәбләр яймышлар (Эрамызын VIII әсриндә Испанияя һүчум этдикдә). Эләчә дә VIII әсрдә әрәб рәгәмләри Бағдада кечмишдир. О вахт әрәбләрин сай системи бүтүн Авропая яйылмыш олду.

Сай системләринин мүхтәлиф ола биләчәйи фикринә кәлиб чыхмаг чох да чәтин олмашдыр. Сай системләринин мүхтәлифлийи дейилдикдә һесабламанын әсасыны тәшkil әдән әдәдин мүхтәлифлийи дүшүнүлмәлидир. Юхарыда тарихән әсасын он көтүрүлдүйүнү вә верилмиш (4) ифадәсиндәки әдәдин (5) ифадәсиндә олдуғу кими язылмасыны шәртләшәрәк, бу системи онлуг сай системи адландырдыг. Эйни заманда юхарыда мүхтәлиф халгларын сай системләринин әсасыны он дейил, башга натурал әдәд әмәлә кәтирә биләчәйи гәнаәти дә һасил әдилди. Һесабламанын әсасыны ики дә көтүрмәк олар, йә'ни мүәййән

¹ Санскрит дили гәдим вә орта әсрдә Һиндистанын әдәби дили олмушдур.

эшия чохлуғунун элементләрини саймаг үчүн бу чохлугдан шейләри ики-ики айырмаг олар. Бу һалда мүмкүндүр ки, ердә я һеч бир шей галмасын я да бир шей галсын. Сонра айырдығымыз ики-ики шей топасыны, әкәр мүмкүндүрсә дөрд-дөрд, сәккиз-сәккиз, он алгы-он алты айыраг. Бурада тәклиий 1 илә, олмаян ваһидләрин ериндә 0 язмагы шәртләшәк. Беләликлә, икилик сай системиндә „ики“ әдәди сайын әсасы олдуғундан икинчи мәртәбәнин бир ваһиди олачагдыр. Бу ваһид „10“ шәклиндә язылачаг. Онда „үч“ әдәди икинчи мәртәбәнин бир ваһидиндән (ики) вә садә тәкликдән (1) ибарәт олдуғундан, 11 кими язылачагдыр. „Дөрд“ әдәди икинчи мәртәбәнин ики ваһидиндән ибарәт олдуғуна көрә үчүнчү мәртәбәнин ваһиди олур. Үчүнчү мәртәбәни 100 кими язмалыйыг. Сәккиз исә дөрдүнчү мәртәбәнин бир ваһиди олдуғу үчүн 1000 кими язмалыйыг. Бурадан көрүнүр ки, икилик сай системиндә әдәди язмаг үчүн чох ер тәләб олунур. Мәсәлән, 15 әдәдини икилик сай системиндә язаг. 15-дә дөрдүнчү мәртәбәнин бир ваһиди (сәккиз), үчүнчү мәртәбәнин бир ваһиди (дөрд), икинчи мәртәбәнин бир ваһиди (ики) вә нәһайәт бир тәклик вардыр. Она көрә „он беш“ әдәдини 1111 кими язмалыйыг.

Әкәр икилик сай системиндә язылмыш 10110 әдәдини охумаг лазым кәләрсә демәлийик ки, бурада бешинчи мәртәбәнин бир ваһиди, (йә’ни бир он алты) вардыр. Дөрдүнчү мәртәбәнин ваһиди йохдур, үчүнчү мәртәбәнин бир ваһиди (йә’ни бир дөрд) вардыр, икинчи мәртәбәнин бир ваһиди (йә’ни бир ики) вардыр, тәклик исә йохдур. Демәли, бизим яздығымыз әдәддә он алты, дөрд вә ики вардыр ($16 + 4 + 2$), икилик системиндә яздығымыз 10110 әдәди онлуг системиндә 22-дир. Дедикләримизи тамамласаг 15 вә 22 әдәдләрини (онлуг сай системиндә язылмышдыр) икилик системиндә белә язмалыйыг:

$$15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = (1111)$$

$$22 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 10110.$$

Фикримизи үмумиләшдирәк. Тутаг ки, верилмиш N әдәдиндә, икилик системиндә $n + 1$ -чи мәртәбәдә a_n ваһид, n -чи мәртәбәдә a_{n-1} ваһид (я бирдир, я сыфыр) вә и. а. икинчи мәртәбәдә a_1 ваһиди (я бирдир, я сыфыр) вә нәһайәт a_0 ваһид вардыр (я бирдир, я сыфыр),

Әкәр икилик сай системиндә N әдәдинин һөкмән n -чи мәртәбәси вардырса, онда $a_n = 1$ олмалыдыр.

Беләликлә һәммин әдәди

$$N = 1 \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0.$$

шәклиндә язмалыйыг.

Мәишәтдә он-он саймагдан башга беш-беш саймаг да хейли яйылмышдыр. Мәсәлән, Чиндә беш-беш саймаг гәбул олунмушдур. Белә ки, бешләр чүт-чүт группашыр.

Инди эсасы беш олан позисион системдэн (бешлик сай системи) бәһс эдәк.

Һәр бир әдәди бешлик сай системиндә язмаг үчүн беш рәгәм кифайәтдир. Бу рәгәмләри

1, 2, 3, 4, 0

илә ишарә эдәк (онлуг системиндә ишләдилән рәгәмләрдән айырда этмәк үчүн, бешлик системиндә ишләдилән рәгәмләрин алтындан хәтт чәкилмишдир). Беш әдәди (бир беш) икинчи мәртәбәнин бир ваһидидир; садә тәклийн ериндә 0 язмагла, ону 1 0 илә ишарә этмәлийик (онлуг системиндә икинчи мәртәбәнин бир ваһиди 10 язылдығы кими). Фикримизи изаһ этмәк үчүн 278 әдәдини (онлуг системдә язылмышдыр) бешлик сай системиндә язаг. Һәр шейдән әввәл бу сайы (мүәййән гәдәр шейләрин сайыны) беш-беш айырмалыйыг.

Ола билсин ки, һәмин айрылышын сонунда сайы беш олмаян вә бешдән аз олан шейләр галсын, вә я һеч бир шей галмасын. Буну мүәййән этмәк үчүн 278-и бешә бөлмәк кифайәтдир:

$$\begin{array}{r} 278:5 = 55 \\ -25 \\ \hline 28 \\ -25 \\ \hline 3 \end{array}$$

Беләликлә, 278-дә 3 садә тәклик, 55 икинчи мәртәбә тәклийн вардыр. Лакин икинчи мәртәбәнин беш ваһиди, үчүнчү мәртәбәнин бир ваһиди олдуғундан (чүнки сай системинин эсасыны беш гәбул этмишик) икинчи мәртәбәнин 55 ваһидиндә нечә дәнә үчүнчү мәртәбәнин ваһиди олдуғуну тапмаг үчүн 55-и 5-ә бөлмәлийик:

$$\begin{array}{r} 55:5 = 11 \\ -5 \\ \hline 5 \\ -5 \\ \hline \end{array}$$

Демәли икинчи мәртәбәнин 55 ваһидиндә үчүнчү мәртәбәнин он бир ваһиди вар, икинчи мәртәбәнин ваһиди исә йохдур (олмаян ваһидин еринә 0 язмалыйыг.) Инди дөрдүнчү мәртәбәнин ваһидләрини тапмалыйыг.

Она көрә дә 11-и 5-ә бөлмәлийик:

$$\begin{array}{r} 11:5 = 2 \\ -10 \\ \hline 1 \end{array}$$

йә'ни гисмәтдә 2, галыгда исә 1 алыныр. Демәли, дөрдүнчү мәртәбәдә 2 ваһид, үчүнчү мәртәбәдә исә бир ваһид вардыр. Беләликлә, 278 әдәдиндә дөрдүнчү мәртәбәнин ики ваһиди,

үчүнчү мәртәбәнин 1 ваһиди, икинчи мәртәбәнин сыфыр ваһиди вә нәһайәт үч садә тәклик вардыр. Беләликлә, 278 әдәдинин бешлик сай системиндә язылышы $\underline{2} \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{3}$ олачагдыр.

Инди исә бешлик сай системиндә язылмыш бир әдәди, онлуг системдә язмағы өйрәнәк. Тутаг ки, бешлик системиндә язылмыш $\underline{4} \ \underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1}$ әдәдини онлуг системиндә язмаг тәләб олу- нур. Бу язылышдан айдындыр ки, сағдан биринчи ердә языл- мыш 1 әдәди садә бир (1) тәклийи, сағдан икинчи ердә языл- мыш 2 әдәди ики 5-и, үчүнчү ердә язылан 3 әдәди үч, дәфә „беш—беши“ нәһайәт сол кәнардакы 4 әдәди исә $4 \cdot 5^3$ әдәдини көстәрир. Беләликлә, бешлик системиндә язылмыш $\underline{4} \ \underline{3} \ \underline{2} \ \underline{0}$ әдәди:

$$4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 586$$

олар, демәли

$$\underline{4} \ \underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1} = 586$$

олачагдыр.

Юхарыда гейд әдиләнләри үмумиләшдирсәк, дейә биләрик ки, әсасы беш олан сай системиндә верилмиш һәр бир нату- рал N әдәди

$$N = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 5 + a_0$$

шәклиндә көстәрә биләрик. Белә ки, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ коэффи- циентләри 0, 1, 2, 3, 4 гиймәтләрини ала биләр.

Демәли биз һәмин N әдәдини

$$N = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_1 \cdot a_0$$

шәклиндә язмалыйыг.

Верилмиш бир әдәди еддилик системиндә язсаг

$$N = a_m \cdot 7^m + a_{m-1} \cdot 7^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0$$

аларыг. Демәли һәмин натурал N әдәдини еддилик системиндә $N = a_m \cdot a_{m-1} \cdot \dots \cdot a_1 \cdot a_0$ шәклиндә язмалыйыг. Гейд әдиләнләри тамам үмумиләшдирсәк дейә биләрик ки, p әсасына көрә язылмыш

$$a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_1 \cdot a_0$$

әдәди

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

әдәдиндән ибарәтдир.

Бурада сай системинин әсасы көтүрүлән p әдәди 10 әдә- динә бәрабәр, бөйүк вә я кичик көтүрүлә биләр. $p \leq 10$ оларса, верилмиш әдәди язмаг үчүн онлуг системиндә һәмин әдәдин язылышында тәләб олунаң рәгәмләрдән чох, $p > 10$ олдугда исә аз рәгәм тәләб олунаң. Бу, сай системинин һәм әлверишли, һәм дә әлверишли олмаян чәһәтини ортая чыхарыр. Сай системинин әсасыны лап кичик көтүрдүкдә эйни бир әдәдин язылмасы үчүн чох ер лазым олур. Әсас бөйүк олдугда исә чохлу рәгәм ядда сахламаг лазым кәлир. Мәсәлән, икилик системиндә 0, 1; бешлик системиндә 0, 1, 2, 3, 4; еддилик

системиндэ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; онлуг системиндэ исэ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 кими он рэгэм габул эдилиб ишлэдилмэлидир. Оникилик системиндэ исэ бу рэгэмлэрдэн башга он эдэдини (α), он бир эдэдини (β) ишарэ эдэн рэгэмлэри дэ элава этмэлийик.

Белэликлэ, оникилик сай системиндэ „он ики“ 10 кими, „ийирми ики“ 1 α (чүнки 22-дэ бир дэнэ он ики вэ он тэклик вардыр). „Ийирми үч“ эдэди 1 β шэклиндэ язылмалыдыр. „Йүз гырх бир“ исэ β 9 кими язылмалыдыр (чүнки „йүз гырх бир“ эдэдиндэ он ики он бир (β), 9 тэклик вардыр. $\alpha \beta$ эдэди исэ „йүз отуз бир“-ин язылышыдыр (чүнки $\alpha \beta = 10 \times 12 + 11 = 131$).

4. Эсли эдэдлэр

Биз юхарыда натурал эдэдлэр үзэриндэ апарылан эсас эмэллэрин хассэлэрини кестэрдик. Лакин натурал эдэдлэрин бир сыра дахили ганунларына тохунмадыг. Бунлардан натурал эдэдлэрин бөлүнмэ габилиийэти, һэр бир натурал эдэдин эсли вуруглара айрылмасы, эсли эдэдлэрин сайсыз чох олмасы кими ганунлары кестэрмэк олар.

Натурал эдэдлэрин белэ хассэлари *эдэдлэр нэзэрийэси* адланан фэндэ өйрөнилир.

Эдэдлэр нэзэрийэсиндэ эсли эдэдлэрин чох эһәмийэти вардыр. Ваһиддэн бөйүк олуб ялныз өзүнэ вэ ваһидэ бөлүнэн, һэр бир натурал эдэдэ *эсли эдэд* дейилир. Мэсэлэн,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 вэ с. эдэдлэри эсли эдэдлэрдир.

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 вэ с. эдэдлэр исэ эсли эдэд дейилдир, чүнки бунларын ваһиддэн вэ өзүндэн башга бөләнлэри вардыр:

$$14 = 7 \cdot 2; \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ вэ с.}$$

Эсли олмаян (мүрэккэб) эдэдлэрин элверишли чәһэтлэриндэн бири онларын эсли вуруглара айыла билмэсидир. Мүрэккэб эдэдин ардычыл сурэтдэ бөләнлэрини тапмагла ону эсли вуруглара айырмаг олар:

$$36 = 18 \cdot 2 = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Тарихән эһ гәдим мэсэлэлэрдэн бири мүхтәлиф эсли эдэдлэрин сайынын сонлу вэ я сонсуз олмасы мэсэлэсидир. Эсли эдэдлэрин сонсуз сайда олмасы чох гәдим заманлардан мә'лумдур. Бунун Эвклиддән¹ габаг мә'лум олдуғуна шүбһэ ола

¹ Эвклид гәдим юнан, риязийятчысы, Искәндәрийә мәктәбинин мәшһур һәндәсә алимидир. Бәзи тарихчилэрин вердиклэри мә'лумата көрә (онун һәят вэ фәалийәти һагда дүрүст мә'лумат йохдур) о, бизим эрадан эввәл IV—III әсрләрдә яшамышдыр.

Эвклид дөврүнә гәдәр юнан һәндәсәсинин һаилийәтлэрини топлаяраг „Башланғычлар“ адлы 13 китабдан ибарәт өлмәз бир әсәр язмышдыр.

Бу әсәр 500 илдән артыг бир дөвр әрзиндә бүтүн сынаглардан чыһараг гиймәтини азалтмамыш вэ гәдим риязийятын мөһтәшәм бир абидәси олараг яшамыш вэ яшамагдадыр.

билмэз. Эвклид өзүнүн „Башлангычлар“ адлы эсэриндэ эсли эдэдлэрин сонсуз сайда олдуғуну „долайы үсулла“ (эксини фэрз эдэрэк энддийэтэ кэлиб чыхмаг үсулу илэ) исбат этмишдир. Бу риязи тэклифин исбатыны көстэрэк. Тутаг ки, эсли эдэдлэрин сайы чох бөйүк олса белэ ена сонлудур. Онларын n дэнэ, олдуғуну фэрз эдэк. Бу эсли эдэдлэри

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

илэ ишарэ эдэк. Намин эдэдлэрин ичэрисинэ бизим билдийимиз 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

эсли эдэдлэринин дэ дахил олдуғуна шүбһэ йохдур. Бу эдэдлэри бир-биринэ вуруб үзэринэ бир ваһид алаа эдэрэк вэ алынан эдэди P илэ ишарэ эдэк:

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n + 1.$$

Айдындыр ки, P эдэди $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ эдэдлэринин һэр бириндэн бөйүкдүр вэ эсли эдэд дейилдир (чүнки эсли эдэдлэрин һамысы P_1, P_2, \dots, P_n -лэрин ичэрисиндэди).

Онда P эсли эдэд олмадыгы үчүн эсли вуруглара айрымалыдыр, йә’ни, бир вэ я бир нечэ эсли эдэдэ галыгсыз бөлүнмэлидир. Бу исэ мүмкүн дейилдир, чүнки P эдэди буларын һэр биринэ бөлүндүкдэ 1 галыг галыр. Демэли, бизим садэ эдэдлэрин сонлу сайда олмасы һаггындакы фэрзиййэмиз зидд нәтичәйэ кәтириб чыхарыр. Она көрэ эсли эдэдлэрин сайы сонлу дейил, сонсуздур. Алдығымыз бу нәтичэ бир гэдэр „нәзәри“ олса да һамин йол илэ сонсуз сайда эсли эдэдләр тапмаг олар.

Тутаг ки, һансы йолла олурса-олсун P_1, P_2, \dots, P_n дэнэ эсли эдэд тапмышыг. Бә’зи һалларда

$$P_{n+1} = P_1 \cdot P_2 \cdots P_n + 1 \quad (6)$$

эсли эдэд олур. Бу гайда илэ давам этсэк сонсуз сайда эсли эдэдләр элдэ этмиш оларыг¹. Мәсәлән тутаг ки, $P_1 = 2, P_2 = 3$ эсли эдэдлэрини тапмышыг.

Онда

$$\begin{aligned} P_3 &= 2 \cdot 3 + 1 = 7, \\ P_4 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43, \\ P_5 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807, \end{aligned}$$

вэ и. а. чохлуча эсли эдэд тапмаг олар. Биз эсли эдэдлэрин алынмасы үчүн (6) формулундан истифадэ этдик. Лакин һамин формул васитәсилэ истәдийимиз ~~бә’зи~~ эдэди ала билмирик. Мәсәлән, индишә нәзәрдән кечирдийимиз мисалда $P_1 = 2, P_2 = 3$ эдэдлэриндән башлайыб галан эсли эдэдлэри гурмаг истәдикдэ бир нечэ эсли эдэди гура билмәдик.

¹ (6) формулу бә’зән эсли олмаян эдэди дә ифадэ эдир. Мәсәлән, $P_1 = 3, P_2 = 7$ олдугда $P_3 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$ олур.

Догрудан да 5, 11, 12, ... эсли эдэдлэрини бу гайда илэ гурмаг олмур. Эсли эдэдлэри гурмаг үчүн башга формуллар да мөвчүддүр. Лакин бу формуллар васитэсилэ дэ бүтүн эсли эдэдлэри элдэ этмэк мүмкүн дейилдир.

Ферма (1601—1665) белэ бир фикир сөйлэмишдир ки, куя

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

шэкиннэ олан бүтүн эдэдлэр эслидир. Мәсэлэн, $n = 1, 2, 3, 4$ олдугда

$$F(1) = 2^2 + 1 = 5,$$

$$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 17,$$

$$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257,$$

$$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537.$$

Лакин 1732-чи илдэ бөйүк рус вэ алман алыми Эйлер¹ көстөрди ки,

$$2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$$

кими вуруглара айрылыр. Демэли,

$$F(5) = 2^{2^5} + 1$$

эсли эдэд дейилдир.

Сонра Ферма формулу васитэсилэ даһа бир нечэ мүрәккәб эдэд тапылмышдыр. Лакин индийэ гэдэр Ферма формулу васитэсилэ сонсуз сайда эсли эдэд элдэ эдилэ биләчәйи исбат эдилмәмиш галмышдыр.

$f(n) = n^2 - n + 41$ формулу васитэсилэ дэ эсли эдэд элдэ этмэк олар. Мәсэлэн, $n = 1, 2, \dots, 40$ көтүрдүкдә эсли эдэд, $n = 41$ көтүрдүкдә исә мүрәккәб эдэд элдэ эдилир:

$$f(41) = 41^2$$

$n^2 - 79n + 1601$ формулу васитэсилэ дэ 1-дән 79-а кими эсли эдэдлэр алына билэр. Артыг $n=80$ олдугда мүрәккәб эдэд

¹ Эйлер бөйүк риязийятчы, механик вэ физикдир. 1707-чи илдэ о Исвечрэдә анадан олмушдур. Илк тәһсилини атасынын янында алмыш вэ кәчт яшларындан Бериуллинин рәһбәрлийи алтында риязийят өйрәнмәклә мәшгул олмушдур. 1720-чи илдә Базел (Исвечрэдә) Университетинә дахил олмуш вэ Бериуллинин риязийята анд сөйләдийи мүнәзирәлэри динләмишдир. Эйлер 1727-чи илдә Петербург Элмләр Академиясына дэ вәт олунмушдур. Бурада о, риязи ярадычылығы инкишаф этдирмәк үчүн яхшы шәраит тапмышдыр. 1741-чи илдә Берлинә кетмиш вэ Берлин академиясында өз ярадычылығыны давам этдирмишдир. 1766-чы илдә енидән Петербурга гайитмышдыр.

Эйлер ән мәһсулдар риязийятчы олмушдур. Онун 550-ә яхын китаб вэ мәгаләлэри вардыр. О, риязийят, механика, дәннизчидик, физика, эластиклик нәзәриййәси кими мүхтәлиф әлмләр сәһәсиндә әлми-тәдгигат ишләри апармышдыр.

Эйлер 1783-чү илдә Петербургда вәфат этмишдир.

алыныр. Эсли эдэдлэр күүли мигдардадыр. Онларын сонсуз сайда олдуғу юхарыда көстөрилди. Риязийятда белэ һалларда дейилир ки, эсли эдэдлэрин сонсуз сайда олмасы исбат эдилмишдир. Һазырда 1-дән 10000000-а гэдэр олан эдэдлэр арасындакы бүтүн эсли эдэдлэрин чэдвэли вардыр.

Эсли эдэдлэрин бир нечэ өзүнэ хас олан хассэлэри вардыр:

1) 2 мүстәсна олмагла бүтүн эсли эдэдлэр тәк эдэдләр-дир. Һәр бир чүт эдәди $2 \cdot n$ шәклиндә көстәрә биләрик.

Онда айдындыр ки, бу эдәд 2 -йә, n -ә, 1 -ә, $2n$ -ә бөлүндүйүндән эсли эдәд дейилдир.

2) Фәрглэри 1 -ә бәрабәр олан натурал эдэдләрә *янашы натурал эдэдләр* дейилир, мәсәлән, 2 вә 3 ; 5 вә 6 ; 101 вә 102 вә и. а.

Чох тәәччүблүдүр ки, бүтүн янашы натурал эдэдләр ичәрисиндә ялныз 2 илә 3 эсли эдэдләрдир. Доғрудан да 2 -дән башга һансы эсли эдәди көтүрсәк 0 , тәк эдәд, она янашы олан эдәд исә чүт эдәд олмалыдыр, чүт эдәд исә (2 -дән башга) эсли эдәд дейилдир.

3) Эсли эдэдләр ичәрисиндә фәрги 2 оланлар да вардыр. Мәсәлән, 3 вә 5 , 5 вә 7 , 11 вә 13 вә и. а. белә эсли эдэдләр чүтүнә *әкиз эдэдләр* дейилир.

5. Ән бөйүк ортаг бөлән вә ән кичик ортаг бөлүнән

Тутаг ки, ики a вә b натурал эдэдлэри үчүнчү c натурал эдәдинә бөлүнүр. Һәмин c натурал эдәдинә a вә b натурал эдэдлэринин *ортаг бөләни* дейилир. Ики вә даһа чох натурал эдэдлэрин неч олмаса, бир дәнә ортаг бөләни вардыр. Мәсәлән, 1 эдәди ики вә даһа чох ихтияри натурал эдэдлэрин ортаг бөләнидир. Ики вә икидән чох натурал эдэдлэрин ортаг бөләнлэри бир нечә дәнә дә ола биләр. Мәсәлән, 2 , 3 , 6 эдэдлэри, 18 илә 24 эдэдлэринин ортаг бөләнлэридир.

Ортаг бөләнләр бөлүнәнлэрин Һәр бириндән кичик олдуғу үчүн верилмиш ики натурал эдәдин ортаг бөләнлэри сонлу сайдадыр вә бу ортаг бөләнлэрин ичәрисиндә бириси галанларындан бөйүкдүр. Бу ахырынчы бөләнә *ән бөйүк ортаг бөлән* дейилир. Мәсәлән, 18 илә 24 эдәдинин ән бөйүк ортаг бөләни 6 -дыр¹.

Ән бөйүк ортаг бөләни ваһидә бәрабәр олан ики натурал эдәдә *гаршылыглы эсли эдэдләр* дейилир.

Инди дә верилмиш ики a вә b натурал эдэдлэринә бөлүнән эдэдлэри нәзәрдән кечирәк.

Верилмиш ики a вә b натурал эдэдлэринә бөлүнән үчүнчү натурал эдәдә бу ики натурал эдәдин *ортаг бөлүнәни* дейи-

¹ Ики вә я бир нечә натурал эдәдин ән бөйүк ортаг бөләннин тапмағ үчүн Эвклид алгоритминдән истифадә этмәк олар (бу барәдә һесаб китабларына мүрациәт эдилә биләр).

лир. Мәсәлән, 5 вә 7 әдәдләринин бир чох ортаг бөлүнәнләрини көстәрмәк олар. 35, 70, 105, 140 вә и. а. әдәдләри 5 вә 7-ниң ортаг бөлүнәнләридир. Бурадан көрүнүр ки, верилмиш ики натурал әдәдин ортаг бөлүнәнләринин сайы сонсуздур. Ләкин бу ортаг бөлүнәнләрин ичәрисиндә бириси галанларынын һамысындан кичикдир. Буну силә ишарә әдәк. Бу ахырынчы бөлүнәнә, верилмиш a вә b әдәдләринин *ән кичик ортаг бөлүнәнни* дейилир вә белә ишарә әдилир:

$$(a, b) = c.$$

Бизим мисалда $c = 35$ -дир: $(5, 7) = 35$ олур.

Эйнилә бир нечә натурал әдәдин *ән кичик ортаг бөлүнәнни* дә тапа биләрик. Мәсәлән, a, b, c, \dots, d әдәдләринин *ән кичик ортаг бөлүнәнни* тапмаг үчүн әввәлчә a вә b әдәдләрини көтүрүб онларын *ән кичик ортаг бөлүнәнни* тапырыг, сонра бу әдәдләри силиб ерләриндә онларын *ән кичик ортаг бөлүнәнни* язырыг. Алынан әдәдләри дә белә әдирик. Белә олдугда ахырда ики әдәд галачағы айдындыр. Бу ики әдәдин *ән кичик ортаг бөлүнәнни*, верилән әдәдләрин һамысынын *ән кичик ортаг бөлүнәнни* адланыр. Мәсәлән,

$$(4, 5, 7, 18) = (20, 7, 18) = (140, 18) = 1260.$$

Верилмиш әдәдләрин *ән кичик ортаг бөлүнәнни* тапмаг үчүн онлары әсли вуругларына айырмаг, сонра бу әдәдләрин һәр ортаг вуругларындан бирини көтүрүб ортаг олмаян вуругларын һамысына вурмаг лазымдыр.

$$(4, 9) = 36, \text{ чүнки } 4 = 2 \cdot 2, \quad 9 = 3 \cdot 3.$$

Бурада $C = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Инди исә 36 илә 18-ин *ән кичик ортаг бөлүнәнни* тапмаг:

$$(36, 18) = 36$$

чүнки

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,$$

бурада

$$C = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36.$$

§ 2. КӘСРЛӘРИН МӘНШӘН ВӘ ТӘШӘККҮЛҮ

Биз индийә гәдәр сай прссесинин нәтичәсиндә яранмыш вә сонралар инкишаф әтмиш натурал әдәдләр анлайышындан бәһс әдик. Инсалар өз әмәли вә зейни фәалийәтиндә шейләри тәкчә саймагла кифайәтләnmәмшләр. Онлар һәлә чох гәдим заманлардан, һәтты күнү-күндән артан тәләбләри гаршысында узунлуг, чәки, һәчм кими кәмийәтләри¹ өлчмәк

¹ К мийәтләр һаггында II һиссәнин § 1-дә мүфәссәл мә'лумат верилмишдир.

ишинә дә сә'й этмишләр. Бурада инсанларын әмәли фәалий-йәти вә эләчә дә һәятдакы әһтиячы дедикдә бир инсанын вә я бир нәслин әмәли фәалийәти дейил, нәсилдән-нәслә мирас галмыш, узун бир тарихи инкишаф йолу кечмиш инсан тәч-рүбәси вә инсан әһтиячы баша дүшүлмәлидир.

Ән дүзкүн вә һәяти тәчрүбә, тарихин сәмәрәли сүзкәчләр-риндән кечмиш вә сонракы нәслә мирас галмышдыр.

Һәр чүр сәмәрәсиз олан вә һәяти олмаян тәчрүбә эләчә дә бу тәчрүбәйә әсасланан нәзәриййә кеч вә я тез белә бир сүз-кәчдән кечә билмәдийинлән сонракы нәслә мирас галмамыш-дыр. Эләчә дә әдәлләр һаггындакы анлайышлар тәмизләндикидән, сүзүлдүкдән сонра нәсилдән-нәслә кечмишдир.

Инсанлар дағ дөшләриндән, чай кәнарларындан дәниз дибиндән ахтардығы тәмиз, чилаланмыш, тәбии инчиләр, кристаллар, мин гат сүхурлардан сүзүлмүш шәффаф сулар кими әдәлләри дә һәятын әсрарәнкиз һадисәләри ичәри-синдән тапыб чыхардараг өз әһтиячларына табе этмишләр.

Кәмийәтләрин өлчүлмәси тарихән инсан тәчрүбәсиндә гат-гат вә кетдикчә назикләшән сүзкәчләрдән кечмишдир.

Әввәлләрдә өлчүләр „көзәяры“ апарылырды. Мәсәлән, узун-луғу өлчмәк үчүн әл, дирсәк, гулач, аддым, ағач кими өлчүләрдән истифадә эдилирди. Юхарыда Халдейләрин дирсәк узунлуғу ($525 \text{ мм} \approx 0,5 \text{ м}$) узунлуғу ваһиди гәбул әгдикләрини көрдүк. Гәдим өлчү ваһидләриндән чәрәк, гулач, ағач инди дә чох ердә ишләдилир. Сонралар, инсан ә'залары олан әл, дирсәк, гол, аддым тәгрибән бу узунлуғуда көтүрүлән чубуг вә и. а. кими өлчү ваһидләрилә әвәз эдилди. Бир чисмин узун-луғуну өлчмәк үчүн инсанлар һәммин чубуғу өлчүләчәк чис-мин боюна тутуб онда нечә дәфә ерләшдийини йохлайырды-лар. Бә'зән өлчү ваһиди, чисмин узунлуғунда там дәфә ерләш-мәдикдә өлчү ваһидини гырыб ярыя, үч ерә, дөрд вә и. а. һиссәйә бөлүб һәммин чисми кичик өлчү ваһидләрилә өлчүр-дүләр.

Ағырлығы тә'йин этдикдә исә ваһид гәбул эдилән бир дашы ерә чырпараг онун парчаларыны ваһид гәбул эдирди-ләр. Беләликлә даһа кичик ваһидләр сечилмәйә башлады.

Натурал әдәд анлайышынын тәшәккүлүндән һәлә чох сонра ваһидин бөлүнмәз олдуғу фикри һөкм сүрмәкдә иди. Даһа кичик, дәгиг өлчү ваһидләринин яранмасы, әввәлки өлчү ваһидләринин ики, үч, дөрд вә и. а. бәрабәр һиссәйә бөлүн-мәси ваһидин бөлүнмәз олмасы фикринә сон гойду. Ваһидин ики, үч, дөрд бәрабәр һиссәйә бөлүнәрәк бир һиссәнин ени ваһид гәбул эдилмәси садә кәср ваһидләрини яратды. Белә-

ликлә $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ вә и. а. садә кәсрләри мейдана чыхды.

Гейд әтмәк لازمдыр ки, бу кәсрләр мүчәррәд кәср кими дейил, айры-айры кәмийәтләрин өлчү ваһиди кими ишләди-

лирди. Риязи фикир инкишафынын һәмийн дөврүндә ади кәср ики натурал әдәдин гисмәти кими мә'лум дейилди. Мүхтәлиф халғлар мүхтәлиф кәср ваһиди ишләдирдиләр.


Халдейләрин, өлчү вә чәки ваһидләр системи XVIII әсрин ахырларында яранмыш, метрик өлчү вә чәки системләринә гәдәр әлми әсасы олан еканә систем олмушдур.

Бабилиләрин риязи әсәрләриндә мәхрәчи 6 олан $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$, кәсрләринә раст кәлирик. (Бурада ваһидин нечә бәрабәр




һиссәлә бөлүндүйүнү көстәрән әдәдә мәхрәч, бу бәрабәр һиссәләрдән нечәсинин көтүрүлдүйүнү көстәрән әдәдә исә сурәт дейилр.) Икинчи синиф кәсрләр исә мәхрәчи 60, сурәти 1-дән 59-а кими натурал әдәдләрдән ибарәт олан кәсрләрлир. Бабилиләрин, мәхрәчи 60 олан кәсрләр көтүрдүкләринин сәбәбини 60 әдәдинин чохлу бөләнләринин олмасы вә илин тәғвим күнләринә бөлүнмәси илә изаһ әдилир. Бир чох риязийят тарихчиләри 60-лыг системинин, онлуг вә алтылыг системләринин синтезиндән ирәли кәлдийини дә сөйләйирләр. Алтмышлыг сай системи Халдейләрин өлчү вә чәки системинин әсасы гәбул әдилмишдир. Онлар өлчү системинин әсасы олараг 60 хәттә бөлүнән дирсәк ишләдирдиләр.

Эрамыздан 2—3 йүз ил әввәл гәдим Мисир әразисиндән тапылан папируслардан, әһрамлар вә сүтунлардакы язылардан, нәгшләрдә мисирлиләрин йүксәк һесаблама техникасына саһиб олдуғлары, садә кәсрләр васитәсилә һесабламалар апардығлары ашкар олмушдур.


Мисир һесаблайычылары¹ һәр бир кәсри „әсас“ кәсрләрин чәми кими көстәрә билирдиләр. Әсас кәср дедикдә бир нечә кәср $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \text{вә и. а.}\right)$ мүстәсна әдиләрсә, $\frac{1}{k}$ (k — натурал әдәддир) шәклиндәки „ваһид“ кәсрләр баша дүшүлүрдү.













Мисирлиләр белә „ваһид“ кәсрләри язмағ үчүн бизим һазырда мәхрәчдә яздығымыз әдәд еринә ваһидин һиссәләринин сайыны, онун үстүндә исә  ишарәсини язырдылар (бу ишарә әввәлләрдә һәчм ваһиди ериндә ишләдилрди, тәхминән 0,17 литрә бәрабәр тутулурду). Мәсәлән $\frac{1}{5}$ -и

¹ Һесаблама ишләри гәдим Шәрг әләминдә мирзәләр тәрәфиндән апарылды. Гәдимдә мирзәлик йүксәк пешә сайылды. Мирзәләр савадлы, бөйүк һесаблама истедадына вә яддаша саһиб олмалы иди.

 $\frac{1}{10}$ -и  $\frac{1}{15}$ -и  шәклиндә ишарә

әдирдиләр.

Сонралар бу һероглиф¹ ишарәләр дәйишдириләрәк башга шәклә дүшдү. Мәсәлән,  ишарәси нөгтә илә әвәз әдилди. Нүмунә үчүн ринд папирусларындакы бир нечә ишарәни көстәрәк:

											
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ кәсрләри дә юхарыда гейд этдийимиз кими әсас кәср-

ләрдән сайылырды, йә'ни бу кәсрләр садә адландырдығымыз кәсрләрин чәми васитәсилә дейил, мүстәгил кәср кими ишләнирди. Гейд этдийимиз кими, о заман кәсрләр һаггында үмуми мүлаһизәләр йүрүдүлмүрдү. Кәсрләр фәрди хусусийәтләринә көрә танынырды. Сонралар садә кәср сайылан бә'зи белә кәср-

ләр, $\frac{1}{k}$ (буну \bar{k} илә ишарә әдәк) шәклиндә олан „ваһид“ кәсрләрин чәми кими көстәрилди. Мәсәлән, мүасир ишарәләрлә язсаг $\frac{3}{4} = \bar{2}\bar{4}$ шәклиндә ишләнирди². Әләчә дә $\frac{2}{3} = \bar{3}\bar{3}$ кими

язылдығы һалда $\frac{2}{3}$ кәсри садә һесаб әдилирди. Чох мараглы-

дыр ки, $\frac{2}{5}$ кәсри $\bar{5}\bar{5}$ шәклиндә дейил, $\bar{3}\bar{1}\bar{5}$ шәклиндә ифадә әдилирди.

Әләчә дә $\frac{7}{8} = \bar{2}\bar{4}\bar{8}$ кими язылырды. Ринд папирусунун әввәлләриндә 2 әдәдинин 3 илә 99 арасында олан тәк әдәд-

¹ Һероглиф чох айдын рәсм әдилмиш Мисир язы тарихиндә гәдим ишарәләрдир. Бу ишарәләр Мисир әразисиндә олан гәдим абидәләр үзәриндә нөгшә әдилмишдир.

² $\bar{2}\bar{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ демәкдир. Ян-яна язылан кәср һиссәләри арасында чәм ишарәси дүшүнүлмәлидир.

лэрэ бөлүмөсүнө хүсуси диггэт верилмишдир. Мәсәлән, һәмий папирусларда „2-ни 3-ә, 5 ә 17-йә вә и. а. бөл“ сөзләринә раст кәлирик. Мүасир дилдә десәк папируста $\frac{2}{2n+1}$ кәсрини (л әдәди 1-дән 49-а кими натурал гиймәтләр алып), онда мөхрәч 3-дән 99-а кими натурал гиймәтләр ал р), сурәти вәһид олан кәсрләрлә ифадә әтмәк мәсәләси нәзәрдән кечири-дир. Һәтта бир кәсрини бир нечә ифадәсинә дә раст кәлмәк олур. Мәсәлән,

$$\frac{2}{43} = \overline{24\ 258\ 1032}; \overline{30\ 86\ 645}; \overline{36\ 86\ 645\ 172\ 774}; \overline{40860}$$

$\overline{1720}; \overline{42\ 86\ 129\ 301}$ вә и. а. кими мүхтәлиф шәкилдә язырлар.

Бабилләрә кәлдикдә гейд әтмәк ләзымдыр ки, онлар 60 әсасына кәрә тәкчә натурал әдәдләри дейил, кәсрләри дә ифадә әтмәк мәсәләси илә мәшғул олмушлар (биз кәсрләри онлуг кәсрләрлә көстәрдийимиз кими). Мәсәлән, һазырда $2\frac{3}{5} = 2,6$ шәклиндә яздығымыз кими бабилләрдә $2\frac{36}{60}$ шәклин-

дә язырдылар вә  кими ишарә әдирдиләр.

Юхарыда яздығымыздан айдындыр ки, бу ишарә әйни заманда $156 = 2 \cdot 60 + 36$ -ны ифадә әдир. Башга сөзлә бабил язылары, әдәдләри биргиймәтли сурәтдә тә'йин әтмир. Кәсрләрин 60-лыг системиндә көстәрилмәси бабилләрин ишләтдийи үмуми үсул иди. Садә кәсрләр $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ үчүн онлар вә Бабилистанда

яшаян халглар (сумериләр вә аккадлар) хүсуси ишарәләр ишләдирдиләр.

Сумериләр

$\frac{1}{2}$ кәсрини




$\frac{1}{3}$ кәсрини



$\frac{2}{3}$ кәсрини



шәклиндә ишарә әдирдиләр. Сон-

ралар аккадлар һәмий кәсрләри уйғун олараг 



шәклиндә ишарә әдирдиләр.

Кәсрләр башга халглар тәрәфиндән дә өлчү вә чәки ишләриндә ишләдилмишдир. Халгларын биркәсә'й вә тәшәббүсү нәтижәсиндә адлы кәсрләр сай просесиндә олдуғу кими кеткәдә өз адларындан, өлчү просесинин нәтижәси олмасындан

узаглашыб үмуми, мүчэррэд бир мә'на кәсб әгмишдир. Неса́б фәнини әдәдләр һаггында бир әлм олараг инкишаф этмәйә башладыгы замандан кәсрин мүчэррэд маһийәти мейдана чыхды, кәсрә ики натурал әдәдин нисбәти кими бахылмаға башланды вә кәсрләр натурал әдәдләрә гошулду. Бу исә натурал әдәдләрин биринчи кенишләнмәси олду. Кәср хәттинә XII әсрдә Әл-Һассаринин әсәриндә раст кәлирик.

Онлуг кәсрә¹ (йә'ни мәхрәчи он вә онун гүввәти олан кәсрләрә) илк дәфә һиндлиләрдә раст кәлирик. Онлар онлуг кәсри, кәср хәтти илә язырдылар.

XV әсрдән башлаяраг онлуг кәсрләр әлмдә ишләдилирди. XVIII әсрдә исә онлуг өлчү вә чәки системи гәбул әдилмәсиндән сонра онлуг кәсрләр һеса́б әлминдә сабит бир мөвгә тутду.

Кәсри ики натурал әдәдин нисбәти кими көтүрмәк, натурал әдәдләрә мәхрәчи ваһид олан кәср кими вә я бири дикәринә там дәфә бөлүнән ики натурал әдәдин нисбәти кими бахмаға мүмкан верир. Тутаг ки, p вә q ики натурал әдәддир. Бир өлчү просесиндә өлчүлән кәмийәтин вә я бир чохлауға q бәрәбәр һиссәйә бөләрәк алынан һиссәләрдән p дәнә көтүрдүйүнү

$\frac{p}{q}$ кәср илә көстәрәчәйик. Буну дәриндән тәһлил этдикдә

һәмин өлчү просесинин маһийәтчә сай просесинә бәнзәдийини дуймаг чәгин дейилдир. Она көрә дә инсанда илк дәфә һәмин просесин нәтичәсини натурал әдәд тәбиәтли бир әдәдлә ифадә әдә билмәк фикри ояныр вә кәсрләр әдәдләр син финә аид әдилр. $q = 1$ олдугда $\frac{p}{q} = p$ олур. p ихтияри натурал әдәд

олдуғундан натурал әдәдләр бүтүн мүмкүн олан $\frac{p}{q}$ шәклин-

дәки әдәдләр ичәрисинә дахил әдилир.

XVIII әсрдә белә кәсрләрин өйрәнилмәси чәтин һеса́б әдилрди вә һәтта һәмин әсрдә кәсрә „сыныг әдәд“ дә дейилрди. Эй-ни заманда кәсрә там әдәдлә ифадә әдилә билмәйән ики там әдәдин нисбәти кими дә бахырдылар. Эйлер язырды: „Әкәр бөлмәдә бөлүнәни там дәфә бөлмәк мүмкүн дейилдирсә, онда бөләнин бөлүнәндә нечә дәфә ерләшдийини көстәрән нисбәтә сыныг әдәд вә я кәср дейилр. Гейд әтмәк лазымдыр ки, һәлә XVII әсрдә кәсрә бөйүк риязийятчылар белә әдәд демирдиләр. Мәсәлән, Валлис² белә һеса́б әдилрди ки, кәср әдәд дейилдир.

¹ Онлуг кәср һаггында I һиссә § 5-дә әтрафлы мә'лумат вериләчәктир.

² Жон Валлис (1616—1703) ичкилис риязийятчысыдыр. Оксфорд университетинин һәндәсә профессору олмушдур. Онун „Сонсузлуг һесабы“ китабы интеграл һесабынын ярамагы тарихиндә бөйүк рол ойнамышдыр. Бу китабда чохлау мигдада мүхтәлиф һәндәсә мәсәләләри һәлл әдилмиш, мүәййән интеграллар һесабыланмышдыр (әлчә интеграл аңлайышы дахил олмаздан әввәл). О, дигрәнин квадратурасы мәсәләси илә әлағәдар олараг π әдәдинин ифадәсини тапмышдыр. Әлчә дә (∞) ишарәсини дахил әтмиш вә параллелләр нәзәрийәси илә дә мәшғул олмушдур.

XVIII эсрин икинчи ярысындан э'тибарэн кэсрлэр натурал эдэдлэр кими, эдэд дейэ кениш мигясла ишләдилмэйэ башланды.

Риязийят аләминдә истәр гәдим заманларда истәрсә дә сонралар ени эдэдләр кәшф эдилән кими бу эдэдләр үзәриндә эссә риязи әмәлләрин (топлама, чыхма, вурма, бөлмә) гайдалары һазырланмалы олмушдур.

XVIII эсрин риязийятчылары мәхрәчи мүхтәлиф олан кәсрләрә бирчинсли кәср кими бахмырдылар. Она көрә дә онлар белә кәсрләрн үмуми мәхрәчә кәтирмәйә, йә'ни бирчинсли әтмәйә чалышырдылар вә бу гайда илә кәсрләрн мүгайисә әтмәк истәйирдиләр.

XVIII эсрин тәдрис китабларында

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a : m}{b : m}$$

формулларыны айдын һесаб әдиб, онларын әсасландырылмасына лүзум көрүлмүрдү. Эйлер кәсри ики натурал эдәдин нис-

бәти һесаб әтдийиндән дейирди ки, $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$ олмасы нисбәтин

дәйишмәмәси илә изаһ олунур. Һәмин бәрәбәрлийи һәндәси үсулла да изаһ әдирдиләр. Тутаг ки, MN парчасы (бу парча ваһид һесаб әдилир) b бәрәбәр һиссәйә (шәкилдә 3 бәрәбәр һиссәйә) бөлүнмүшдүр (3-чү шәкил).



3-чү шәкил

Сонра бу һиссәләрин һәр биринин даһа n бәрәбәр һиссәйә бөлүндүйүнү фәрз әдәк (шәкилдә $n=2$ -дир).

Онда MN парчасы $b \cdot n$ бәрәбәр һиссәйә бөлүнәр. Әкәр әввәлки бөлкүләрдән a бөлкү айырсаг ($a=2$ олсун), Mm_2 парчасыны әлдә әдирик, йә'ни $\frac{1}{b}$ -дән a дәфә көтүрмәклә Mm_2 парчасы әлдә эдилир.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Дикәр тәрәфдән Mm_2 парчасынын ени кичик ваһид парчалардан нечәсинә бәрәбәр олдуғуну һесабласаг, ени ваһид парчанын һәр бири $\frac{1}{bn}$ олдуғуну вә Mm_2 -дә белә парчалардан

an дәфә ерләшдийини көрәрик, йә'ни

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$$

олмалыдыр. Эйни гайда илэ

$$\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$$

олдуғуну изаһ этмэк олар.

Белэ мүлаһизэлэр кэсрлэрин ашағыдакы хассэлэрэ малык олдуғуну көстөрир:

1) мэхрәчлэри эйни олан кэсрләрдән сурәти бөйүк олан кэср о бириндән бөйүкдүр.

Тутаг ки, $\frac{a_1}{b}$ вә $\frac{a_2}{b}$ кэсрлэри верилмиш вә бурада $a_1 > a_2$ -дир. Һәр һансы бир чохлуғу b бәрабәр һиссәйә бөлүб, бу һиссәләрдән әввәлчә a_1 сайда, сонра a_2 сайда элемент көтүрсәк, чохлуғун $\frac{a_1}{b}$ һиссәсинин $\frac{a_2}{b}$ һиссәсиндән бөйүк олдуғуну

билаваситә йәгин этмэк олар. 3-чү шәкилдән $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ олдуғу

айдын көрүнүр, чүнки $Mm_2 > Mm_1$.

2) сурәтлэри эйни олан ики кэсрдән мэхрәчи кичик олан кэср бөйүкдүр.

Тутаг ки, $\frac{a}{b_1}$ вә $\frac{a}{b_2}$ кэсрлэри верилмиш вә бурада $b_1 < b_2$ -дир. Онда һәммин чохлуғун $\frac{a}{b_1}$ һиссәси $\frac{a}{b_2}$ һиссәсиндән бөйүк олар, чүнки әввәлчә чохлуғу кичик һиссәләр, сонра бөйүк һиссәләрә бөлүнәрәк һәр ики һалда һиссәләрдән эйни миғдарда көтүрүлмүшдүр. Мәсәлән, 3-чү шәкилдә $\frac{2}{3} > \frac{2}{6}$ -дир, чүнки,

$Mm_2 > Mm_1$.

3) верилмиш ики вә я бир нечә кэсри ортаг мэхрәчә кәтирмәк олар.

Бунун үчүн һәммин кэсрлэрин мэхрәчлэринин эн кичик ортаг бөлүнәнини тапмаг лазымдыр.

Тутаг ки,

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$$

кэсрлэри верилмишдир. Бурада a_1, a_2, \dots, a_n вә b_1, b_2, \dots, b_n ихтияри натурал әдәдләрдир. Тутаг ки, натурал b әдәди b_1, b_2, \dots, b_n әдәдлэринин эн кичик ортаг бөлүнәнидир. Бу һалда $m_1 b_1 = b, m_2 b_2 = b, \dots, m_n b_n = b$ -дир.

Белә олдуғда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 \cdot m_1}{b}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2 \cdot m_2}{b}, \dots, \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n \cdot m_n}{b}$$

эйни мэхрәчли кэсрләр әлдә әтмиш олардыг.

Инди исә кәсрләр үзәриндә һесаб әмәлләрини өйрәнәк.

Юхарыда кәсрә дә „әдәд“ ады вердик. Кәсрләр үзәриндә әдиләчәк әмәлләрин хассәләрилә, натурал әдәлләр. үзәриндә әдилән әмәлләрин хассәләри бир-биринә охшадыгы үчүн кәср-ләрин әдәд олмасы нәтичәсини бир даһа тәсдиг әдир.

1. Кәсрләрин топланмасы

Һәятда һәр аддымда элементләрин (тамын) вә элементин һиссәләринин (тамын һиссәләринин) топланмасы, сайылмасы һадисәсинә раст кәлирик.

Тутаг ки, стол үзәриндә бир нечә бүтөв вә бир нечә доғранмыш алма вардыр. Тутаг ки, бир нечә алма дилими дә ейилмишдир. Алма дилимләриндән һәр биринин бир алманын k бәрабәр һиссәйә бөлүнмәсиндән алындыгыны биләрәк (мүмкүндүр ки, алмалар бәрабәр олмаян һиссәләрә дә бөлүнсүн) ейилмәмиш нечә алма галдыгыны тә'йин этмәк үчүн стол үзәриндәки алма дилимләрини бүтөв алмаларла бирликдә саймаг лазымдыр. Сайыны тә'йин этмәк истәдийимиз чохлағун һәр бир элементи (ваһиди) бүтөв бир алма, элементин һиссәләри исә алма дилимләриндән ибарәтдир.

Бүтөв алмалары сайыб, сонра бир-биринә бәрабәр олан алма дилимләрини бирләшдирәрәк даһа нечә бүтөв алма олачагыны тә'йин этдикдән сонра ердә бир алмая тамамланмаян нечә алма дилиминин олдуғуну саймаг лазымдыр.

Тутаг ки, дилимләри бирләшдирдикдән сонра стол үзәриндә m бүтөв алма, бир дәнә ярым алма, n дәнә исә алма дилими галмышдыр ($n < k$ олачагы айдындыр). Стол үзәриндә нә гәдәр алма олдуғуну тә'йин этмәк үчүн $m + \frac{1}{2} + \frac{n}{k}$ -ны топламаг лазымдыр.

Онда белә аларыг:

$$\begin{aligned} m + \frac{1}{2} + \frac{n}{k} &= \frac{2mk}{2k} + \frac{k}{2k} + \frac{2n}{2k} = \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k} \right)}_{2mk \text{ дәфә}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k} \right)}_{k \text{ дәфә}} + \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k} \right)}_{2n \text{ дәфә}}. \end{aligned}$$

Гейд этмәк лазымдыр ки, биз стол үзәриндәки алмаларын мигдарыны тапмаг үчүн сон язылышда мәсәләни зейнән һәр бири $2k$ -я бәрабәр һиссәйә доғранан алма дилимләринин сайылмасына кәтириб чыхармыш олуруг.

Ашкардыр ки, белә дилимләрдән
 $2mk + k + 2n$

гәдәр олачагдыр.

Демәли, стол үзәриндә

$$(2mk + k + 2n) \frac{1}{2k} = \frac{2mk + k + 2n}{2k}$$

мигдарда алма вардыр. Нечә бүтөв алма олдуғуну тапмаг үчүн, мәхрәчин сурәтдә нечә там дэфә ерләшдийини тапмаг лазымдыр.

Садәчә бу мәсәләнни һәлли кәстәрир ки, верилмиш бир риязи мәсәләнни һәлл этмәк үчүн чох вахт мәсәләнни өз ваһидләриндән, билаваситә онун физики шәраитиндән узаглашыб мәсәләнни ени ваһидләрдә, башга бир шәраитдә һәлл этмәли олуруг. Белә бир үсул риязийятын кешиш имканларә малик олдуғуну, риязи фикрин сәрбәстлийини вә кәмийәтләрин мүчәррәд маһийәтини сүбут әдир. Бу садә мисал үзәриндә әйни заманда тамын һиссәләринин (кәсрләрин) нечә топланмасыны да гисмән кәстәрдик. Һәмин гайданы үмүмиләшдириб әйни мәхрәчли кәсрләрин топланмасына белә тә'риф верә биләрик.

Бәрабәр мәхрәчли кәсрләрин чәми, сурәти һәмин кәсрләрин сурәтләри чәминә, мәхрәчи исә һәмин кәсрләрин мәхрәчинә бәрабәр олан бир кәсрдир, йә'ни

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

олар. Башга сөзлә n бәрабәр ерә бөлүнән бир чохлуғун a гәдәр $\frac{1}{n}$ һиссәсилә, b гәдәр $\frac{1}{n}$ һиссәсинин бирләшмәси о чохлу-

ғун $a+b$ гәдәр $\frac{1}{n}$ һиссәсинә бәрабәр олур. Мәхрәчләри мүх-

тәлиф олан кәсрләри топламаг үчүн исә әввәлчә бу кәсрләри, мәхрәчләри һәмин кәсрләрин мәхрәчләринин ән кичик ортаг бөлүнәнинә бәрабәр олан кәсрләрә чевирмәк, сонра онлары бәрабәр мәхрәчли кәсрләр кими топламаг лазымдыр. Мәсәлән:

$\frac{2}{7} + \frac{1}{3}$ -и топламаг үчүн 7 илә 3-үн ән кичик ортаг бөлүнәнини тапырыг. Айдындыр ки, $(7, 3) = 21$. Сонра һәмин кәсрләри ортаг мәхрәчә кәтиририк:

$$\frac{2}{7} = \frac{6}{21};$$

$$\frac{1}{3} = \frac{7}{21}.$$

Она көрө

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{6}{21} + \frac{7}{21} = \frac{6+7}{21} = \frac{13}{21}.$$

олур. Үмүмийәтлө $\frac{a}{b}$ илө $\frac{c}{d}$ кәсрләрини топламаг үчүн әв-
вәлчә b илө d натурал әдәдләринин ән кичик ортаг бөлүнә-
нини тапырыг.

$$\text{Тутаг ки, } (b, d) = m, \frac{m}{b} = p, \frac{m}{d} = q.$$

Онда

$$\frac{a}{b} = \frac{ap}{m}, \frac{c}{d} = \frac{cq}{m}$$

олар. Бурадан

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ap}{m} + \frac{cq}{m} = \frac{ap + cq}{m} \quad (1)$$

алыныр.

(1) формулу кәсрләри топламаг үчүн олан әсас формулдур.
1. Кәсрләри топлама әмәли дө ердәйншмә гануна табе-
дир. (1) формулуна әсасланараг кәсрләри топлама әмәлинин
ердәйншмә гануна табе олдуғуну кәстәрмәк олар. Онун
үчүн әввәлчә натурал әдәдләри топлама әмәлинин ердәйншмә
(коммутативлик) гануна табе олдуғуну нәзәрә алмалыйыг.

Айдындыр ки,

$$ap + cq = cq + ap.$$

Буну нәзәрә алсаг (1) формулуна әсасән ашағыдакылары
яза биләрик:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{cq + ap}{m} = \frac{cq}{m} + \frac{ap}{m} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

алынар.

Демәли, кәсрләри топлама әмәли дө ердәйншмә гануна
табедир:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}. \quad (2)$$

Беләликлө, топланан кәсрләрин ери дәйншдикдө онларын
чәми дәйншмәз.

2. Кәсрләри топлама әмәли ассоснативлик гануна да
табедир. Догрудан да натурал әдәдләри топлама әмәли бу
гануна табе олдуғундан

$$\frac{a_1}{b} + \left(\frac{a_2}{c} + \frac{a_3}{d} \right)$$

ифадәсиндә һәмин гануну нәзәрә алмагла кәсрләрини топланма-
сында да ассоснативлик ганунунун доғру олдуғуну дейә билә-
рик.

Тутаг ки,

$$(b, c, d) = m, \\ \frac{m}{b} = p, \frac{m}{c} = q, \frac{m}{d} = t,$$

онда

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b} + \left(\frac{a_2}{c} + \frac{a_3}{d} \right) &= \frac{a_1 p}{m} + \left(\frac{a_2 \cdot q}{m} + \frac{a_3 \cdot t}{m} \right) = \\ &= \frac{a_1 \cdot p}{m} + \frac{(a_2 q + a_3 t)}{m} = \frac{a_1 p + (a_2 q + a_3 t)}{m} = \\ &= \frac{(a_1 p + a_2 q) + a_3 t}{m} = \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{c} \right) + \frac{a_3}{d}. \end{aligned}$$

Беләликлә кәсрләрин топланмасында ассосиативлик ганунун доғрулуғу исбат әдилмиш олур:

$$\frac{a_1}{b} + \left(\frac{a_2}{c} + \frac{a_3}{d} \right) = \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{c} \right) + \frac{a_3}{d}. \quad (3)$$

2. Кәсрләрин чыхылмасы

Биз кәсрләрин чыхылмасында да чохлуғун элементләринин вә элементләрин һиссәләринин һәмин чохлугдан кәнар әдилмәси нөгтейи-нәзәриндә дурачағыг. Тутаг ки, мүййән элементләрдән вә бу элементләрин һиссәләриндән ибарәт олан *A* чохлуғу верилмиш вә бу чохлуғун мүййән элементләриндән вә элементләринин һиссәләриндән ибарәт олан *B* һиссәсини кәнар әтмишик. Бу һалда *A*-нын галан һиссәси нә гәдәр олур? Бу һиссәни *C* илә кәстәрәк. Айдындыр ки,

$$A = C + B$$

олар. *A* чохлуғундан онун *B* һиссәсинин кәнар әдилдийини вә *C* һиссәсинин галдығыны кәстәрмәк үчүн ону $A - B = C$ шәклиндә язырлар. Буну *B* чохлуғу кәнар әдилмиш *A* чохлуғуну *C* илә әйни сайлы кими баша дүшүрүк.

Чохлуғун бүтүн элементләринин вә онларын һиссәләринин һәмин чохлугдан кәнар әдилмәсинин хусуси әһәмийәти вардыр. Бу һалда ашкардыр ки, $A - A$ чохлуғу бош чохлуг олачагдыр. Айдындыр ки, бош чохлугда нә бир элемент, нә дә элементләрин һиссәләри олачагдыр. Белә бир суал мейдана чыхыр, чохлуғун элементләрини, әләчә дә элементләринин һиссәләрини вә бу чохлугдан кәнар әдилән мүййән элементләри әләчә дә һиссәләрини билдикдә, ердә нә гәдәр элемент вә элементләрин һиссәләринин галдығыны тә'йин әтмәк мүмкүндүрмү? Бу суала чаваб вермәк үчүн бир мәсәлә һәлл әдәк:

Мәсәлә. $105\frac{3}{4}$ һектарлыг бир тәсәррүфат саһәсинин $53\frac{1}{2}$ һектарында тәрәвәз, галан һиссәсиндә күнәбахан вә гарғыдалы

экилмишдир. Күнөбахан вә гарғыдалынын экилдийи саһә нә гәдәрдир?

Демәли, элә бир саһәни тапмаг лазымдыр ки, бу саһәни тәрәвәз экилән саһә мигдарынын үзәринә кәлдикдә тәсәррүфат саһәсинин мигдарына $\left(105\frac{3}{4}h\right)$ бәрабәр олсун. Онун үчүн $\left(53\frac{1}{2}\right)h = \left(53 + \frac{2}{4}\right)h$ язаг. Айдындыр ки, $105\frac{3}{4}h$ алмаг үчүн $\left(53 + \frac{2}{4}\right)h$ -ын үзәринә $\left(52 + \frac{1}{4}\right)h$ кәлмәлийик. Демәли,

$$105\frac{3}{4}h - 53\frac{1}{2}h = 52\frac{1}{4}h$$

алынар.

Беләликлә чыхма, ики топланандан бири вә топлананларын чәми мә'лум икән икинчи топлананы тапма әмәлидир. Бурада чәмә азалан (юхарыдакы мәсәләдә азалан $105\frac{1}{2}h$ -дыр), мә'лум топланана чыхылан $\left(53\frac{1}{2}h\right)$ -дыр, ахтарылам топланана исә фәрг дейилир $\left(52\frac{1}{4}h\right)$. Бу дейиләнләри үмумиләшдирсәк белә нәтичәйә кәлирик: әкәр $\frac{a}{b}$ кәсри А чохлуғунун мигдарыны, $\frac{c}{b}$ кәсри кәнар эдилән В чохлуғунун мигдарыны кәстәрирсә (мигдары ифадә эдән ики кәсри һәмишә ортаг мәхрәчә кәтирмәк олар), $\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ фәрги илә $\frac{c}{b}$ -нин чәминин $\frac{a}{b}$ олачағы айдындыр, йә'ни $\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ элә бир кәсрә бәрабәр олмалыдыр ки, ону $\frac{c}{b}$ илә топладыгда $\frac{a}{b}$ алынсын.

Она көрә дә

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{d}{b}$$

олдугда

$$\frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{c+d}{b} = \frac{a}{b}$$

алынмалыдыр.

Бурада топлама әмәлинин, чыхма әмәлине тәрс олдуғу да мейдана чыхыр. Топлама әмәли васитәсилә әввәлки миг-

дар тапылыр. Элэчэ дэ чыхма эмэли, топлама эмэлинин тэрсидир. Белэликлэ, топлама эмэли илэ чыхма эмэли гаршылыгы тэрс эмэллэрдир.

Чох вахт мүхтэлиф мэхрэчли кэсрлэрин дэ чыхылмасы лазым кэлир. Биз буну юхарыдакы мәсэлэдэ көрдүк. Бүтүн бунлары үмумилэшдирэрэк дейэ билэрик ки, ики кэсрин фэргини тапмаг үчүн эввэлчэ һәмин кэсрлэри ортаг мэхрэчэ кэтирмэк, сонра алынан кэсрлэри бэрабэр мэхрэчли кэсрлэр кими чыхмаг лазымдыр.

Кэсрлэрин фэрги ашағыдакы хассэлэрэ маликдир:

1) азалан чыхыландан бөйүк олмалыдыр;

2) чэми чыхмаг үчүн топлананлары бир-бир чыхмаг олар. Тэрсинэ, топлананлары чыхмаг үчүн бу топлананларын чэминин чыхылмасы кифайэтдир. Онун үчүн

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{b} + \frac{d}{b} \right) &= \frac{a}{b} - \frac{c+d}{b} = \frac{a - (c+d)}{b} = \frac{(a-c) - d}{b} = \\ &= \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b} \right) - \frac{d}{b}.\end{aligned}$$

Белэликлэ,

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{b} + \frac{d}{b} \right) = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b} \right) - \frac{d}{b}. \quad (4)$$

3) элэчэ дэ верилмиш эдэди, чэмдэн чыхмаг үчүн ону топлананларын бириндэн чыхмаг олар;

4) фэрги бир эдэдин үзэринэ элавэ этмэк үчүн азаланы топлайыб, чыхыланы чыхмаг олар;

5) фэрги чыхмаг үчүн азаланы чыхыб, чыхыланы топламаг олар.

3. Кэсрлэрин вурулмасы вэ бөлүнмэси

Кэсри натурал эдэдэ вурма

Эввэлчэ кэсрин ваһиддэн бөйүк олан натурал эдэдэ, сонра исэ ваһидэ вурулмасы һалларыны нэзэрдэн кечирэк. Кэсрин натурал эдэдэ вурулмасыны натурал эдэдин натурал эдэдэ вурулмасы кими, йэ'ни вуруланын вурандакы ваһидлэри сайы дэфэ өз-өзү илэ топланмасы кими изаһ эдэчэйик:

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ дэфэ}},$$

йэ'ни

$$\frac{a}{n} \cdot k = \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \dots + \frac{a}{n} = \frac{a + a + \dots + a}{n} = \frac{ak}{n}.$$

Башга сөзлэ, верилмиш кэсри натурал эдэдэ вурмаг үчүн кэсрин мэхрэчин дэйишмэйиб сурэтини һәмин натурал эдэд дэфэ артырмаг лазымдыр. Биз юхарыда натурал эдэдин ваһидэ вэ сыфра вурулмасынын тэ'рифини вердик.

Элече дэ бурада

$$\frac{a}{n} \cdot 1 = \frac{a}{n}$$

$$\frac{a}{n} \cdot 0 = 0$$

тэ'рифлэрини гəбул эдэчəйик.

Кэсри тама бөлмэ

Юхарыда ики натурал эдэдин галыгсыз бөлүnməсини шəрһ эдəркəн кəстəрдик ки, бир натурал эдэди дикəринə бөлмək, һасил вə вуруглардан бири мə'лум олдугда дикəр вуруғу тапмаг демəкдир.

Бурада ики һал вардыр. Биринчи һалда ики натурал эдэдин һасили вə вуран мə'лум олдугда вуруланы тапмаг, икинчи һалда исə һасил вə вурулан мə'лум олдугда вураны тапмаг тəлəб эдилир.

Биринчи һалда уйғун олараг кэсрин тама (натурал эдэдə) бөлүnməsi мəсəлэлəринə дə раст кəлирик. Мəсəлən, $\frac{3}{5} m$ күбрəнин 6 тэсəррүфат саһəsi арасында бəрабэр бөлүnməsi тəлəб эдилəрсə, һэр тэсəррүфат саһəсинə дүшəн күбрəни x кг илə ишарə эдиб, 6 тэсəррүфат саһəсинə дүшəн $\frac{3}{5} m$ күбрəнин x -дэн 6 дəфə чох олдуғуну нəзэрə алараг

$$x \cdot 6 \text{ кг} = \frac{3}{5} m = 600 \text{ кг}$$

шəклиндə яза билəрик.

Натурал эдэдлэр саһəсиндə биринчи һала уйғун олараг

$$x = \frac{600}{6} = 100$$

олмалыдыр. һасил кэср олдугда да эйни бөлмə гайдасы тəт-биг эдилмəлидир.

Тутаг ки,

$$x \cdot n = \frac{p}{q}$$

Бурада да натурал эдэдлэр саһəсиндə олдуғу кимн

$$x = \frac{p}{q} : n$$

ишарəsi ишлəдилмəлидир.

Белə бир тəбии суал мейдана чыхыр: о, һансы эдəддир ки, n -ə вурудугдан сонра $\frac{p}{q}$ кэсринə бəрабэр олур? Зəһнən белə

бир кэсрин $\frac{p}{q \cdot n}$ олдуғуну тə'йин этмək чəтин дейилдир.

Доғрудан да,

$$\frac{p}{q \cdot n} \cdot n = \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q}$$

олар. Демәли,

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \cdot n}$$

гәбул этмәклә биз, вурма вә бөлмә әмәлләринин билдийимиз хассәләринә зидд олмаян ашағыдакы хассәни әлдә әдирик: верилмиш кәсри натурал әдәдә (тама) бөлмәк үчүн һәмин кәсрин сурәтини сабит сахлайыб, мәхрәчини тама вурмаг кифәйәтдир.

Белә бир суал да мейдана чыха биләр: кәсри юхарыда көстәрилән гайда илә тама бөләркән онларын чәми вә фәрги пайлама ганунуна табе олурму? Бу суала чаваб верәк:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} \right) : m &= \frac{a+b}{n} : m = \frac{a+b}{n \cdot m} = \frac{a}{n \cdot m} + \frac{b}{m \cdot n} = \\ &= \frac{a}{n} : m + \frac{b}{n} : m. \end{aligned}$$

Беләликлә,

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} \right) : m = \frac{a}{n} : m + \frac{b}{n} : m$$

олдуғуну алырыг, йә'ни кәсрләрин чәмини тама бөлмәк үчүн айры-айры топлананлары һәмин тама бөлүб, алынан гисмәтләрн топламаг кифәйәтдир.

Бу ганун кәсрләрин фәрги үчүн дә өз күчүндә галыр:

$$\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n} \right) : m = \frac{a}{n} : m - \frac{b}{n} : m.$$

Кәсрә вурма

Биз юхарыда натурал әдәди вә кәсри натурал әдәдә вурмаг гайдаларындан бәһс этдик. Инди исә натурал әдәдин кәсрә вә кәсрин кәсрә вурулмасындан бәһс әдәк.

Ашкардыр ки, натурал әдәдин вә кәсрин кәсрә вурулмасында вуруланы, вуранда олан ваһидләрин сайы дәфә өз-өзү илә топланмасы кими тә'йин этмәк мүмкүн дейилдир, чүнки натурал әдәди вә кәсри, кәср дәфә топланан олараг тәкрат әтмәк олмур.

Белә бир суал мейдана чыхыр: бәлкә һәятда, мәишәтдә натурал әдәдин вә кәсрин кәсрә вурулмасы һалларына һеч раст кәлмирик?

Мә'лум тамын верилән кәср гәдәр һиссәсинин тапылмасы вә мә'лум кәсрин верилән кәср гәдәр һиссәсини тапмаг кими үмуми мәсәләләр буна чаваб ола биләр.

Мәсәлән, $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{1}{n}$ -ни тапмаг тәләб олунур. Бунун үчүн $\frac{p}{q}$ -нү n һиссәйә белүб белә һиссәләрдән бирини көтүрмәк лазымдыр.

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \cdot n}$$

Башга сөзлә, мә'лум әдәдин верилән һиссәсини тапмаг үчүн мә'лум әдәди һәмин һиссәйә бөлмәк лазымдыр.

Инди исә $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{m}{n}$ һиссәсини тапаг. Әввәлчә $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{1}{n}$ һиссәсини тапыб, йә'ни $\frac{p}{q \cdot n}$ -и билиб, сонра һәмин һиссәни m дәфә көтүрмәк лазымдыр. Йә'ни $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{m}{n}$

һиссәси $\frac{pm}{qn}$ -ә бәрәбәрдир. Беләликлә, мә'лум кәсрин верилән кәср гәдәр һиссәси, сурәти бу кәсрләрин сурәтләри һасилиндән, мәхрәчи исә һәмин кәсрләрин мәхрәчләри һасилиндән ибарәт олан бир кәсрә бәрәбәрдир.

Мә'лум кәсрин верилмиш кәср көстәрән гәдәр һиссәсини тапмаг үчүн олан бу гайда ердәйишмә (коммутативлик) вә ассоциативлик ганунларына табедир. Доғрудан да,

1. Бирик ки,

$$\frac{p}{q} \text{ кәсринин } \frac{m}{n} \text{ һиссәси } \frac{pm}{qn} \text{-дир.}$$

Эйни гайда илә

$$\frac{m}{n} \text{ кәсринин } \frac{p}{q} \text{ һиссәси } \frac{mp}{nq} \text{-дир.}$$

Дикәр тәрәфдән

$pm = mp$, $qn = nq$ бәрәбәрликләри доғрудур. Онда (натурал әдәдләр вурма гәмәлине көрә коммутативлик гануна табедир).

$$\frac{p \cdot m}{q \cdot n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

олур. Демәли, кәсрин верилән кәср көстәрән гәдәр һиссәсини тәйин этдийимиз әмәл коммутативлик гануна табедир.

2. Ассоциативлик ганунун доғру олдуғуну көстәрәк: $\frac{a}{b}$

кәсринин $\frac{c}{d}$ һиссәсинин $\frac{p}{q}$ һиссәси, ашкардыр ки, $\frac{ac}{bd}$ кәсри-

нин, $\frac{p}{q}$ хиссэсинэ, йэ'ни $\frac{(ac)p}{(bd)q}$ -йэ барабардир.

Дикэр тэрэфдэн $\frac{a}{b}$ кэсринин, $\frac{c}{d}$ -нин $\frac{p}{q}$ хиссэси гэдэр хиссэси

$$\frac{a}{b} \left(\frac{cp}{dq} \right) = \frac{a(cp)}{b(dq)} = \frac{(ac)p}{(bd)q}$$

кэсринэ барабардир.

3. Инди дистрибутивлик ганунунун догрулуғуну исбат эдэк.

$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right)$ кэсринин $\frac{p}{q}$ хиссэсинин $\frac{(a+b)p}{cq}$ олачагы айдындыр. Бурадан

$$\frac{(a+b)p}{c \cdot q} = \frac{ap+bp}{cq} = \frac{ap}{cq} + \frac{bp}{cq}.$$

Саг тэрэфи нэзэрдэн кечирдикдэ көрүнүр ки, чэмин биринчи хэдди $\frac{a}{c}$ кэсринин $\frac{p}{q}$ хиссэсинэ, икинчи хэдди исэ $\frac{b}{c}$ кэсринин $\frac{p}{q}$ хиссэсинэ барабардир.

Верилэн кэср гэдэр хиссэси мэлум олан кэсри тэ'йин этмэк үчүн вердийимиз тэ'рифи вэ онун малик олдуғу эсас хассэлэри дэриндэн арашдырдыгда көрүрүк ки, верилэн эдэдин кэср көстэрэн гэдэр хиссэсини тапмаг хэмин эдэди кэсрэ вурмаг демэкдир. Мэлум эдэдин верилмиш кэср гэдэр хиссэсини тапмаг эмэлини кэсрэ вурма адландыраг. Башга сөзлэ, $\frac{a}{b}$ кэс-

ринин, $\frac{c}{d}$ кэсринэ хасили $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right)$, $\frac{a}{b}$ кэсринин $\frac{c}{d}$ хиссэсинэ барабардир. Демэли, тэ'рифэ көрө белэ яза билэрик:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Белэликлэ, верилмиш ики кэсрин хасили, сурэти бу кэсрлэрин сурэтлэри хасилиндэн, мэхрэчи исэ хэмин кэсрлэрин мэхрэчлэри хасилиндэн ибарэт олан кэсрэ барабардир.

Ики кэсрин хасилини, верилмиш кэсрин, верилмиш хиссэсинин тапылмасы эмэли адландырдығымыздан кэсрлэрин хасилини дэ, натурал эдэдлэрин вэ кэсрлэрин чэминин табе олдуғу ганунлара табе олачагы айдын олур, йэ'ни:

$$1. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \quad (\text{вурмада коммутативлик гануну}).$$

2. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}$ (вурмада дистрибутивлик гануну).

3. $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \frac{p}{q}$ (вурмада ассосиативлик гануну).

Кэсрә бөлмә

Кэсрә бөлмә әмәлинин тә'рифинә кечмәздән әввәл верилмиш әдәдин тәрсинин тә'рифини верәк.

Һасили ваһидә бәрабәр олан ики натурал әдәддән биринә о биринин *тәрси* дейилир.

Натурал n әдәдинин тәрси $\frac{1}{n}$ -дир. Доғрудан да, $\frac{1}{n} \cdot n = 1$.

$\frac{p}{q}$ кәсринин тәрси $\frac{q}{p}$ -дир. Доғрудан да, $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$.

Биз натурал әдәдә вурма әмәлиндән кэсрә вурма әмәлине кечдикдә бизә мә'лум олан вурма әмәлинин тә'рифи әвәзиндә даһа үмүми олан тә'риф гәбул этдик.

Белә күман әдилә биләр ки, натурал әдәдә бөлмәкдән кэсрә бөлмә әмәлине кечдикдә дә ени бир тә'риф гәбул әтмәлийик. Әслиндә исә ени бөлмә тә'рифинә һеч бир әһтияч йохдур.

Доғрудан да, бөлмә әмәли, һасил вә вуруглардан бири мә'лум олдугда о бири вуруғу тапмаг әмәлиндән ибарәтдир. Белә ки, бу тә'рифдә һасили мә'лум олан ики вуругдан һансынын мәчһул, һансынын там, һансынын кәср олдугу барәдә һеч бир шәрт верилмир. Она көрә дә:

$$\frac{p}{q} : \frac{c}{d} = x$$

язылышында әлә бир x -и тапмаг нәзәрдә тугулур ки, бу x -и $\frac{c}{d}$ -йә вурдугда $\frac{p}{q}$ кәсри алынсын, йә'ни

$$x \cdot \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$$

олсун.

Бу бәрабәрлийин һәр ики тәрәфини әйни $\frac{d}{c}$ кәсринә вурсаг

$$\left(x \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{d}{c} = \frac{p}{q} \cdot \frac{d}{c}$$

аларыг.

Вурмадакы ассосиативлик гануна эсасэн яза билэрик:

$$\left(x \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{d}{c} = x \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}\right) = x \frac{cd}{dc} = x \cdot 1 = x.$$

Демэли,

$$\frac{p}{q} : \frac{c}{d} = \frac{p}{q} \cdot \frac{d}{c}$$

олур, йэ'ни бир эдэди о бири эдэдэ бөлмэк үчүн бөлүнэни бөлэнин тэрсилэ олан эдэдэ вурмаг лазымдыр.

Дикэр тэрэфдэн кэсрин кэсрэ бөлүнмэси гайдасыны белэ дэ изаһ этмэк олар: тутак ки, һэр һансы бир x эдэдинин $\frac{c}{d}$ һиссэси $\frac{p}{q}$ -йэ барабардыр, йэ'ни $x \cdot \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$; x -и тапмаг үчүн $\frac{p}{q}$ -нү $\frac{c}{d}$ -йэ бөлмэк лазымдыр.

x эдэдинин $\frac{c}{d}$ кэсри гэдэр һиссэси $\frac{p}{q}$ -дүр, йэ'ни x эдэди d гэдэр барабар һиссэйэ бөлүнмүш вэ белэ һиссэлэрдэн c гэдэр көтүрүлэрэк $\frac{p}{q}$ алынмышдыр. Инди x -и тапмаг үчүн $\frac{p}{q}$ -нү c -йэ бөлүб онун $\frac{1}{d}$ һиссэсини тапмаг, сонра да d -йэ вурмаг лазымдыр. $x = \frac{p \cdot d}{q \cdot c}$ алыначагдыр.

Демэли,

$$x \cdot \frac{c}{d} = \frac{p}{q};$$

бурадан

$$x = \frac{p}{q} : \frac{c}{d} = \frac{p \cdot d}{q \cdot c}$$

алыныр.

Үмүмийэтлэ кэсрлэрин бөлүнмэсини, натурал эдэдлэрин бөлүнмэси кими тэ'риф этсэк вэ кэсрлэрин бөлүнмэси натурал эдэдлэрин бөлүнмэсинин табе олдуғу хассэлэрэ малик олса да, кэсрлэрин бөлүнмэсинин өзүнэ мэхсус хассэлэри мөвчүдүр.

Бу хассэлэр ашағыдакылардыр.

1. Белэн сыфыр олмадыгда кэсрлэр чохлуғунда бөлмэ эмэли истэнилен гэдэричра эдилэ билэр. Мә'лум олдуғуна керэ натурал эдэдлэр чохлуғунда ики натурал эдэдин гисмэти,

бүтүн һалларда натурал әдәд олмадығы үчүн натурал әдәдләр чохлуғунда бөлмә әмәли һәмишә мүмкүн дейилдир.

Кәсрә бөлмә әмәли исә бөләннин тәрси олан әдәдә вурмагдан ибарәт олдуғу үчүн (бөлән сыфыр олмадыгда) һәмишә ичра әдилә биләр.

2. Натурал әдәдләрнин гисмәти натурал әдәд олдугда, гисмәт, бөләннин бөлүнәндә нечә дәфә ерләшдийини вә я бөлүнәннин бөләндән нечә дәфә бөйүк олдуғуну кәстәрдийи юхарыда гейд әдилмишдир.

Лакин натурал әдәдләрнин гисмәти кәср олдугда гисмәтин, бөлүнәннин бөләндән нечә дәфә бөйүк олдуғуну кәстәрдийини сөйләмәк олмаз.

Она көрә дә, бир кәсрин дикәринә бөлүнмәсиндән алыннан гисмәти онларын *нисбәти* дейә адландырырлар.

Ики әдәдин нисбәти анлайышы эрамыздан габаг IV—III әсрләрдә тәшәккүл этмишдир.

Нисбәтләр нәзәриййәсинин инкишаф йолларында Шәрг алимләринин, о чүмләдән Азәрбайчан алыми Нәсирәддин Тусинин¹ (1201—1274) мүһүм үмумиләшдирмәләри вә ени нәзәриййәләри мөвчуддур. Нисбәтдә иштирак әдән бөлүнәнә нисбәтин әввәлки һәдди, бөләнә исә *нисбәтин сонракы һәдди* дейилир. Мәсәлән, 3:12 нисбәтиндә, әввәлки һәдд 3, сонракы һәдд исә 12-дир.

Бир әдәдин дикәринә нисбәти элә бир әдәдә дейилир ки, бу әдәди нисбәтин сонракы һәддинә вурдугда нисбәтин әввәлки һәдди алыныр. 3-үн 12-йә нисбәти $\frac{1}{4}$ -дир; чүнки $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ олур.

Инди исә бөлмәдә әсас ганунларын доғрулуғуну кәстәрәк.

1. Чәмин вә фәргин бөлүнмәсиндә пайлама (ассосиативлик) гануну мөвчуддур.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} \right) : \frac{p}{q} &= \frac{a \pm c}{b} : \frac{p}{q} = \frac{(a \pm c) q}{b \cdot p} = \frac{aq \pm cq}{bp} = \\ &= \frac{aq}{bp} \pm \frac{cq}{bp} = \frac{a}{b} : \frac{p}{q} \pm \frac{c}{b} : \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Бурада әввәлләрдә исбат этдийимиз ганунлара әсасланараг бәрабәрлийин сағ тәрәфи $\frac{a}{b}$ -нин $\frac{p}{q}$ -йә нисбәти илә $\frac{c}{b}$ -нин

$\frac{p}{q}$ -йә нисбәтинин чәминдән вә фәргиндән ибарәт олдуғу исбат әдилди.

¹ Нәсирәддин „Шәклүл-Гита“ адлы әсәриндә нисбәтләр нәзәриййәсини инкишаф этдирмишдир.

2. Насилин кэсрэ бөлүнмэси. Исбат этдийимиз хассэлэри нэзэрэ алараг яза билэрик:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) : \frac{p}{q} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} : \frac{p}{q} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \cdot \frac{q}{p} = \frac{(a \cdot c) \cdot q}{(b \cdot d) \cdot p} = \frac{a \cdot (c \cdot q)}{b \cdot (d \cdot p)} = \\ &= \frac{a \cdot (q \cdot c)}{b \cdot (p \cdot d)} = \frac{(aq) \cdot c}{(bp) \cdot d} = \frac{a \cdot q}{b \cdot p} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} : \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{c}{d}.\end{aligned}$$

Элэчэ дэ,

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) : \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} : \frac{p}{q}\right),$$

Һэ'ни насили кэсрэ бөлмэк үчүн вуруглардан бирини һэмин кэсрэ бөлмэк кифайэтдир.

3. Кэсрин насилэ бөлүнмэси дэ эйни гайда илэ исбат эдилэ билэр.

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} : \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) &= \frac{p}{q} : \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{p}{q} \cdot \frac{b \cdot d}{ac} = \frac{p(b \cdot d)}{q(a \cdot c)} = \\ &= \frac{(p \cdot b) \cdot d}{(q \cdot a) \cdot c} = \frac{pb}{qa} \cdot \frac{d}{c} = \left(\frac{p}{q} : \frac{a}{b}\right) : \frac{c}{d}.\end{aligned}$$

Элэчэ дэ,

$$\frac{p}{q} : \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{p}{q} : \frac{c}{d}\right) : \frac{a}{b},$$

Һэ'ни эдэди насилэ бөлмэк үчүн һэмин эдэди насилин вуругларына ардычыл бөлмэк кифайэтдир.

4. Бөлэн вэ бөлүнэни эйни бир эдэдэ вурсаг вэ я бөлсэк гисмэт дэйишмэз.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \text{ гисмэтини нэзэрдэн кечирэк. Бөлэн вэ бөлүнэни}$$

эйни бир эдэдэ вураг:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{b \cdot q}; \quad \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q} = \frac{cp}{dq}.$$

Бу ени эдэдлэрин гисмэтини тапаг:

$$\begin{aligned}\frac{ap}{bq} \cdot \frac{cp}{dq} &= \frac{ap}{bq} \cdot \frac{dq}{cp} = \frac{(ap) \cdot (dq)}{(bq) \cdot (cp)} = \frac{a(pdq)}{b(qcp)} = \\ &= \frac{a(d \cdot pq)}{b(c \cdot q \cdot p)} = \frac{(a \cdot d)(p \cdot q)}{(bc)(pq)} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}\end{aligned}$$

§ 3. МЭНФИ ЭДЭДЛЭР

Мэнфи эдэдлэр кэсрлэрдэн чох сонра эмэлэ кэлмиш вэ тэшэккүл этмишдир. Тарихэн мэнфи эдэдлэр элмдэ иррасионал эдэдлэр¹ мэлум олдугдан чох сонра мейдана чыхмыш вэ ишлэдилмэйэ башланмышдыр. Элмдэ мэнфи эдэдлэр ики шәкилдэ тэзаһүр этмишдир:

1) натурал эдэдлэрин фэрги шәклиндэ (бурада һәмишә азалан чыхыландан бөйүк көтүрүлмүшдүр);

2) мүстәгил шәкилдэ (йә'ни натурал вэ кэср эдэдлэрдән фэргләнән ени табиятли эдэд кими).

Натурал эдэдлэрдән мэнфи эдэдлэрә доғру олан инкишаф йолу натурал эдэдлэрдән кэсрлэрә доғру олан инкишаф йолундан вэ бу йолда газанылан тәчрүбәдән чох фэргләнир. Бу чәһәт риязийятда, әйни заманда ики инкишаф хәттиви мүәййән эдир. Биринчиси, риязи авлайышларын мүстәгил формада әһтияч учундан тэзаһүрү вэ инкишафы хәтти (мәсәлән, натурал эдэдлэрин сай просесиндән, кэсрлэрин исә өлчү просесиндән эмэлэ кәлдийи кими). Икинчиси исә, риязийят элминин өз дахили гавунларынын инкишаф хәттидир. Мэнфи эдэдлэрин мәншәи вэ инкишафы икинчи йолла олмушдур. Тәнликләр һәлли вэ һәллин гайдаларындан газанылан тәчрүбә мэнфи эдэдлэрин мәнбәи вэ мәншәи олмушдур.

Натурал эдэдләр даирәсиндә кичик натурал эдәддән бөйүк натурал эдәди чыхманын мүмкүн олмамасы вэ тәнликләр һәлли гайдаларынын үмумиләшдирилмәси мэнфи эдэдлэрин мейдана чыхмасынын әсас сәбәбләридир.

Мэнфи эдэдлэрин илк изләринә әрамызын IV әсриндә яшамыш юнан риязийятчысы Диофантын әсәрләриндә раст кәлирик. Диофантын яшадығы вахт бизә дүрүст мэлум дейилдир. Диофантын тәхминән 365-чи илләрә яхын бир заманда Искәндәрийәдә яшадығыны сөйләмәк олар. Диофантын яшы һаггында белә бир мәсәлә мэлумдур.

Диофант өмрүнүн алтыда бирини ушаглыгда, он икидә бирини кәнчликдә кечиртмишдир. Эвли икән өмрүнүн өвладсыз кечирдийи еддидә бириндән даһа беш ил сонра бир оғлу олмушдур вэ бу оғлан атасынын яшынын ярысына чатдыгда өлмүшдүр. Бундан сонра исә атасы ялныз дөрд ил яшамышдыр².

Бу мәсәләнни һәллиндән көрүнүр ки, Диофант 84 ил яшамышдыр. Диофантын һәяты һаггында бу гәдәр мәлумат вардыр. Диофантын „Һесаб“ адлы әсәри гәдим юнанларын „чәбридир“.

¹ Иррасионал эдэдләр һаггында § 6-да мүфәссәл мәлумат верилир.

² Бу мәсәлә, „Anthologia Gracca“ әсәринин эпиграммасыдыр. Әкәр Диофантын яшыны x илә ишарә этсәк, онда Диофантын яшы

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

тәндийинни һәллиндән тапылдыр. Бурадан $x=84$.

Диофант һеса́б вә чәбр мәсәләләрини һәндәси йолла һәлл этмәйән илк юнан риязийятчысыдыр. О илк дәфә дөрд әмәли, гүввәтә йүксәлтмә вә көкалма әмәлләрини ишләдәрәк һеса́б-лама йолу илә һеса́б вә чәбр мәсәләләрини һәлл этмәйә чәһд этмишдир.

Илк дәфә Диофант $(x+1)(x+2)$ һасилини x^2+3x+2 шәк-линә кәтирмишдир. О, $(x-1)(x-2)$ һасилини һеса́блайыркән „әлавә“ әдилән вә „чыхылан“ әдәди айырараг ашағыдакы гай-даны сөйләмишдир. „Ики чыхылан әдәдин һасили әлавә олу-нан әдәддир, әлавә олунаң әдәдин чыхылан әдәдә һасили исә чыхылан әдәддир“.

Гейд этмәк лазымдыр ки, Диофант мәнфи әдәди мүстәгил бир әдәд кими дейил, һәмишә азаланы чыхыландан бөйүк фәрз әдәрәк фәрг шәклиндә баша дүшүрдү. Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: көрәсән Диофант ишарәләр ганунуну нечә кәшф этмишдир?

Диофант ишарәләр ганунуну фәргләрин вурулмасында ишләтдийинә көрә вурмада һасилин ишарәсини әлә сечмиш-дир ки, икиһәдлини икиһәдлийә вурма гайдасынын (биз инди бу гайданы пайлама вә я дистрибутивлик гануну адландыры-рыг) нәтичәси, әдәди һеса́бламаларда билаваситә һеса́блама-нын нәтичәси илә әйни олмушдур. Мәсәлән,

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2) &= (x-1) \cdot x + (x-1)(-2) = \\ &= x^2 + (-1)x + x(-2) + (-1)(-2); \end{aligned}$$

тутаг ки, $x=3$,

онда $(3-1)(3-2) = 3 \cdot 3 + (-1)(\cdot 3) + 3 \cdot (-2) + (-1)(-2)$

олур.

Билаваситә һеса́бладыгда исә $(3-1)(3-2) = 2 \cdot 1 = 2$ алыныр. Һәмин нәтичәни алмаг үчүн

$$\begin{aligned}(-1) \cdot 3 &= -3, \\ 3 \cdot (-2) &= -6 \\ (-1) \cdot (-2) &= 2\end{aligned}$$

көтүрмәлийик. Шүбһәсиз ки, Диофант тәкчә бу мисал үзә-риндә дейил, чохлу белә һеса́бламалар апардыгдан сонра вур-мада ишарәләр гайдасыны сечә билмишдир.

Диофант бу һеса́бламаларла янашы „Һеса́б“ әсәриндә күлли мигдарда бирдәрәчәли гейри-мүәййән тәнликләр вә икидәрә-чәли мүәййән тәнликләр һәлл этмишдир. Бунларын ән сәчнй-һәви чәһәти бурасындадыр ки, һәмин тәнликләрин һәлли гайда-лары, бу күнүн һәлл гайдаларындан һеч дә фәргләнмир. Лакин тәнликләри һәлл әдиркән Диофант алынаң мәнфи, иррасионал вә хәяли көкләри тулламышдыр. Әлчә дә ики мүсбәт көк оlanda бирисини сахлайыб, диқәрини атмышдыр. Әйни заманда Дио-фант аздан чоху чыхмағы мүмкүн һеса́б этмирди. Бурадан Дио-

фантын мәнфи әдәдләре ябанчы бир мүнәсибәт бәсләдийн айдын көрүнүр.

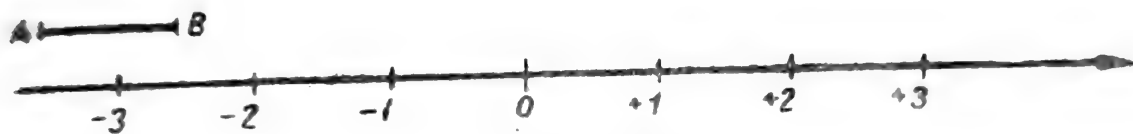
Диофантдан сонра, мәнфи әдәд аңлайышынын инкишафында һинд алимләри даһа чәсарәтли аддымлар атмышлар. Диофант кими һинд алимләри дә мәнфи әдәдләре тәнликләри һәлл этмәк йолу илә кәлиб чыхмышлар. Лакин һиндлиләре тәнликләрин һәллиндә Диофантдан даһа ирәли кетмишләр. һиндлиләре мәнфи әдәдләре тәкчә „чыхылан“ кими дейил, мүстәгил, мүчәррәд әдәд кими бахмышлар.

Һиндлиләре VI—XI әсрләрдә мәнфи әдәдләри мәсәләләрин һәллиндә систематик олараг тәтбиг вә тәдгиг этмишләр. һиндлиләрдә мүсбәт вә мәнфи әдәдләрин, чыхма әмәлинә топлама әмәли кими бахмаға имкан верән хүсуси ишарәләри олмушдур. Мәшһур һинд риязийятчысы Брамагунт (598—660) мәнфи әдәдләре үзәриндә әмәлләр гайдасыны тә'йин этмишдир. О, мәнфи әдәдләри борч, мүсбәтләри исә газанч кими изаһ этмәйә чәһд этмишдир. Она көрә дә бир чох риязийятчылар мәнфи әдәдин мәншәини борч вә газанч мәсәләләринин әдәдләре кечирилмәсиндә көрүрләр. Бу, әдәдләрин мәншәинин борч мәфһумуна кәтириб чыхаран нәзәрийә көкүндән сәһвдир. Мәнфи әдәдләрин белә изаһы онларын һәятдә, мәишәтдә ишләдилмәсиндән сонра мейдана чыхмышдыр. һиндлиләрин мәнфи әдәдләри борч әләмәти кими изаһ этмәләринә бахмаяраг онлар да юнанлар кими мәнфи әдәдләре мүмкүн олмаян әдәд кими бахмышлар. Диофантдан фәргли олараг һиндлиләре квадрат тәнликләри һәлл әдәркән онун һәр ики көкүнү (бу көк мәнфи оlanda белә) тапмаға чалышмышлар. Мәсәлән, сонралар һинд алыми Бхаскара (1114-чү илдә анадан олмушдур) шүүрлу сурәтдә вә систематик шәкилдә мәнфи әдәдләри квадрат тәнликләрин һәллиндә дүзкүн олараг һесаба алмышлар. Мәсәлән, $x^2 - 45x = 250$ квадрат тәнлийинин һәр ики $x_1 = 50$ вә $x_2 = -5$ көкләрини тә'йин этмиш вә бурадача гейд этмишдир: „Лакин икинчи гиймәти көтүрмәк мүмкүн дейилдир, чүнки мәсәләнин тәртинә мүнәсиб дейилдир: адамлар мүчәррәд мәнфи әдәдләри бәйәнмирләр“.

Мәнфи әдәдләре олан белә лагейд мүнәсибәт әлмдә узун заман давам этмишдир. Һәтта XVII әсрдә дә мәнфи әдәдләрин ялан олдуғу фикрини ирәли сүрәнләр аз олмамышдыр. Онлар мәнфи әдәдләри „мүтләг“ (мүсбәт) әдәдләре гаршы гоюраг, бунлары об'ектив олмаян әдәд һесаб әдирдиләр. Лакин һадисәләри дәриндән тәһлил этдикдә һәятдә, мәишәтдә бир-биринә гаршы дуран вә бир-биринә әкс олан кәмийәтләри фәргләндримәк лазым кәлмишдир. Белә гаршы-гаршыя вә бир-биринин әкси олан кәмийәтләре чохлу мисал кәтирмәк олар: кечмиш вә кәләчәк заман, союуглуг вә истилик дәрәчәләри, ики әкс истигамәтдә һәрәкәт әдән чисимләрин сүрәтләри газанч вә зәрәр вә и. а.

Бир-биринә әкс олан кәмийәтләри фәргләндрмәк әсасында бөйүк франсыз риязийәтчысы Р. Декарт (1596 – 1650) өзүнүн „һәндәсә“ (1637) китабында мәнфи әдәдләри истигамәтләнмиш парча кими изаһ әдәрәк, аналитик һәндәсәнин әсасыны гойду, Декарт аналитик һәндәсәдә тәнликләрин көкләринә мүйәйән бир әйринин абсис оху илә кәсишмәси кими бахыб бир дәфәлик мәнфи вә мүсбәт әдәдләр арасындакы зиддийәти арадан галдырды.

Бир дүз хәтт көтүрәк вә бу дүз хәтт үзәриндә ихтияри бир нөгтәни (шәкилдә бу нөгтә O нөгтәсидир) гейд әдәк (4-чү шәкил). Бу нөгтәйә *башланғыч нөгтәси* дейилир. Дүз хәтт



4-чү шәкил

үзәриндә мүсбәт бир истигамәт тә'йин әдәк, O -дан саға доғру истигамәт мүсбәт, сола доғру истигамәт исә мәнфи гәбул әдилмишдир. Сонра ваһид бир AB парчасы гәбул әдәк (4-чү шәкил). Бу парчаны O -дан башлаяраг көтүрдүйүмүз дүз хәтт үзәриндә саға вә сола доғру ардычыл олараг айыраг. Саға доғру ардычыл сүр'әтдә айырдыгда ваһид парчанын сағ учу 1, 2, 3 вә с. нөгтәләринә дүшәчәкдир. Саға доғру һәрәкәт истигамәти мүсбәт гәбул әдилдийиндән һәмин нөгтәләрә уйғун олан әдәдләри $+1, +2, +3$ вә с. илә көстәрәк. Ваһид парчаны дүз хәтт үзәриндә сола доғру айырдыгда исә (һәмин истигамәт мәнфи гәбул әдилмишдир) онун сол учларыны уйғун олараг $-1, -2, -3, \dots$ әдәдләри илә көстәрәк. Бурада $-1, -2, -3, \dots$ әдәдләри гиймәтчә ваһид парчанын узунлуғунун 1, 2, 3... вә и. а. мислини, ишарәчә исә һәмин парчаларын „ O “-дан сола доғру айрылдығыны көстәрир. Беләликлә, әдәд адландырдығымыз бу ахырынчы символлар васитәсилә истигамәтли кәмийәтләри дә характеризә әдә биләрик. Бу символлары әдәд адландырмаға әсасымыз вардыр. Мәсәлән, 5 манат пулун олмасы илә 5 манат борчун олмасы бир-бириндән әкс истигамәтдә дуран дәлилләрдир. Биз бу дәлилләри тәбиәтчә дә фәргләндрмәлийик. Она көрә дә пулун олмасы дәлилини мүсбәт, олмамасы дәлилини исә мәнфи адландырырыг. Биринин мигдарыны көстәрән әдәдә (пулун олмасына) *мүсбәт*, пулун олмамасыны көстәрән әдәдә исә *мәнфи* дейирик.

Беләликлә, натурал әдәдләрин билаваситә давамы олмагла $-1, -2, -3, \dots$ әдәдләри алыныр. Бу әдәдләрә дә натурал әдәдләр кими *там әдәдләр* дейилир. Мәнфи там әдәдләрә мүсбәт там әдәдләрин сыфыр нөгтәсиндәки күзкүдә алынан әксләри кими бахмаг олар.

О-дан сола доғру ваһид парчанын нәинки там мисилләрини, эйни заманда бу ваһидин ярысыны, үчдә бирини вә и. а. кими ихтияри кәср һиссәләрини дә айырмаг олар. Беләликлә, $\frac{p}{q} (q > 0)$ шәклиндә олан ики там әдәдин (мүсбәт вә я мәнфи)

һисбәтини дүз хәтт үзәриндә көстәрмәк олар. Бунун үчүн әв-вәлчә ваһид парчаны q бәрабәр һиссәйә бөлүб, сонра бу һиссәләрдән p дәнә көтүрмәк вә әкәр p мүсбәт тамдырса бу һиссәләри сағда, мәнфидирсә солда айырмаг лазымдыр.

Үмумийәтлә, сыфыр, мүсбәт, мәнфи, там вә кәср әдәдләрә бирликдә *расионал әдәдләр* дейилир (расионал әдәдләр һаггында § 4-дә даһа әтрафлы данышылачагдыр). Мәнфи әдәдләрин дахил әдилмәси илә әдәдләр чохлуғу бир даһа кенишләнмиш олду. Һәр бир ени тәбиәтли әдәдләрлә әлагәдар олараг онлар үзәриндә әдилән әсас әмәлләрин тә'рифи дә мүстәсна әһәмийәтә маликдир. $b > a$ олдугда мәнфи әдәдләрлә янашы

$$(b-a) = -(a-b)$$

олдуғуну да тә'риф кими гәбул әдәк. Белә тә'рифләри гәбул этдикдә эйни заманда мәнфи әдәдләрә гәдәр бизә мә'лум олан әдәдләрин үзәриндә әдилән әмәлләрин табә олдуғу әсас ганунлара да бурада зидд чыхмамалыйыг. Бу ганунлардан бириси дистрибутивлик ганунудур:

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Мәнфи әдәдләрин вурулмасында әлә ишарәләр гануну тапмалыйыг ки, һәммин ганун әдәдләр үзәриндә әдилән әмәлләрин табә олдуғу билдийимиз әсас ганунлара зидд олмайыб, билаваситә онун үмумиләшдирилмәси олсун. Мәсәлән, $(-1) \cdot (-1) = +1$ дейә гәбул әтмәлийик, чүнки башга чүр, йә'ни $(-1) \cdot (-1) = -1$ гәбул әтсәк, онда $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ көтүрдүкдә,

$$a(b+c) = -1 \cdot (1-1) = -1-1 = -2$$

алмыш оларыг. Белә олдугда исә дистрибутивлик гануну позулмуш олар, чүнки, дикәр тәрәфдән

$$a(b+c) = -1(1-1) = -1 \cdot 0 = 0,$$

йә'ни $-2 = 0$ олачагдыр. Бу исә мүмкүн дейилдир. Айдындыр ки, натурал a вә b үчүн $(-a)b$ һасилини $(-a)$ әдәдинин өзү илә b дәфә топланмасы кими тә'йин әдә биләрик:

$$(-a) \cdot b = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_{b \text{ дәфә}} = -(ab).$$

Лакин $a \cdot (-b)$ -ни бу үсулла тә'йин әтмәк мүмкүн дейилдир. Вурмада ердәйишмә ганунунун мәнфи әдәдләрә хас олмасы үчүн

$$a \cdot (-b) = (-b) \cdot a = -(b \cdot a) = -(a \cdot b)$$

гәбул этмәлийик, йә'ни

$$(-1)(+1) = -1, \quad +1 \cdot (-1) = -1$$

олмалыдыр.

Ишарәләр ганунуну бу гайда илә тә'риф этмәклә риязийят даһа кениш һадисәләр сәһәсиндә тәтбиг олуна билир вә өз һәятилийини сүбут эдир. Белә ки, рационал әдәдләр чохлуғу үзәриндә әдилән әмәлләрә һәинки ассоциативлик, коммутативлик, дистрибутивлик ганунлары формал олараг тәтбиг әдилир, һәм дә $a+x=b$ вә $ax=b$ (бурада $a \neq 0$) тәнликләри биргиймәт-ли һәлл олуна билир. Башга сөзлә рационал әдәдләр чохлуғун-да топлама, чыхма, вурма, бөлмә (бөлән сыфыр олмамалыдыр) әмәлләри һүдудсуз олараг апарыла биләр. Рационил әдәдләр үзәриндә апарылан бу әмәлләрин нәтичәсиндә енә дә рационал әдәдләр әлдә әдирик, йә'ни һәмин әмәлләрә көрә рационал әдәдләр чохлуғу гапалыдыр. Белә гапалы әдәдләр чохлуғуна *мейдан* дейилир.

§ 4. РАЦИОНАЛ ӘДӘДЛӘР

1. Рационал әдәдләрин хассәләри

Инди исә рационал әдәдләрин даһа әтрафлы өйрәнилмәсинә кечәк. Бурада рационал әдәдләрин бир нечә мүнүм хассәлә-рини тә'риф дейә гәбул әдиб, галан хассәләрини исбат этмә-лийик. Башга сөзлә рационал әдәдләр нәзәрийәсини гурма-лийыг.

Биз юхарыда, верилмиш ваһиди q бәрабәр һиссәйә бөлүб онун $\frac{1}{q}$ һиссәсини өлчү ваһиди дейә гәбул этдик. Әкәр өлчә-чәйимиз кәмийәтдә бу ваһид p дәфә ерләширсә, онда һәмин кәмийәтин өлчүсү $\frac{p}{q}$ -йә бәрабәр олур. Риязи фикир инкиша-

фынын сонракы пилләсиндә $\frac{p}{q}$ символу өзүнүн конкрет мән-шәнидән узаглашыб, бөйүк мә'на кәсб әдәрәк, даһа кениш мәзмун алмыш вә "әдәд" адландырылмышдыр. Һәр шейдән габаг бу символ әдәдләрин нисбәти кими гәбул әдиләрәк, мүс-тәгил бир маһийәтә саһиб олду вә ики натурал әдәдин нис-бәти рационал әдәд адландырылды.

Ики әдәдин нисбәтинин "әдәд" адландырылмасы үчүн әсас, рационал әдәдләр үзәриндә әдилән әмәлләрин натурал әдәдләр үзәриндә әдилән әмәл ганунларына табе олмасыдыр.

Инди исә рационал әдәдләрин бир нечә мүнүм хассәләрин-дән бәһс әдәк. Бу хассәләрдән бири рационал әдәдләрин һән-дәси тәсвиридир. Бу хассә юхарыда рационал әдәдләрин һән-дәси тәсвири онларын дахили маһийәтини, тәнзим гайдасыны ашкара чыхартмаг үчүн әсас васитәдир.

Юхарыда (4-чү шәкил) һәр бир рационал әдәди дүз хәттин мұәййән нөгтәләри илә тәсвир әтмәк мүмкүн олдугуну көстәр-дик. Она көрә дә көтүрүлән дүз хәттә *әдәд оху* вә әдәд оху-нун гейд әтдийимиз нөгтәләринә *рационал нөгтәләр* дейилир (биз рационал әдәдлә, рационал нөгтәни әйни мә'нада ишлә-дәчәйик). Натурал әдәдләр бәһсиндә ики a вә b натурал әдәд-ләриндән бирисинин дикәриндән бөйүклүк вә кичиклик анлайы-шындан бәһс әтдик. Бу мүгайисәни әдәд оху үзәриндә даһа әяни көрә биләрик. Мәсәлән, $a < b$ олмасы, әдәд оху үзәриндә a нөгтәсинин (йә'ни a натурал әдәдинә уйғун нөгтәнин) b нөг-тәсиндән солда ерләшдийини көстәрир. Бу һәндәси тәсвир, их-тияри ики рационал әдәдин мүгайисәси үчүн әсас көтүрүлә би-ләр. Рационал нөгтәләрин бу гайда илә тә'йин олуна дүзүлү-шүнү сахламаг шәртилә онларын чәми, фәрги, һасили, нисбәти арасында бәрабәрсизликләри тә'йин әтмәлийик. Бунун үчүн белә бир тә'риф гәбул әдирик.

Әкәр $b - a$ фәрги мүсбәтдирсә, онда дейирик ки, b расио-нал әдәди a рационал әдәдиндән *бөйүкдүр*. Она көрә дә a илә b нөгтәләри арасындакы рационал нөгтәләр a -дан бөйүк вә b -дән кичик олан нөгтәләрдир. a, b вә бунлар арасындакы бүтүн нөгтәләрә бирликдә *сегмент* вә я *парча* дейилир вә $[a, b]$ кими ишарә әдилик. Ихтияри a нөгтәси илә 0 (башланғыч) нөгтәси арасындакы мәсафә мүсбәт әдәд һесап әдиләрәк буна a -нын *мүтләг гиймәти* дейилир вә $|a|$ илә ишарә олунар. a әдәдинин мүтләг гиймәти белә тә'йин әдилик: әкәр $a \geq 0$ исә онда $|a| = a$; әкәр $a < 0$ исә, онда $|a| = -a$ демәкдир.

Айдындыр ки, әкәр a вә b әдәдләринин һәр икиси мәнфи дейилсә, йә'ни $a \geq 0, b \geq 0$ исә, онда $a + b \geq 0$ вә $|a + b| = a + b = |a| + |b|$ олар. Әкәр $a < 0, b < 0$ исә онда $a + b < 0$ олар. Белә олдугда $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$ алынар. Демәли, a вә b әйни ишарәлидирсә, онда һәмишә

$$|a + b| = |a| + |b|$$

олар.

Әкәр a вә b мүхтәлиф ишарәлидирсә, айдындыр ки, $|a + b| \leq |a| + |b|$ олар. Мәсәлән, $a = +2, b = -5$ оларса,

$$a + b = 2 - 5 = -3$$

$$|a + b| = -(-3) = 3$$

олар. Дикәр тәрәфдән $|a| = 2, |b| = -(-5) = 5$ олдугундан

$$|a| + |b| = 2 + 5 = 7$$

олар. Демәли, бу һалда

$$|a + b| = 3 < 7 = |a| + |b|$$

яңдығымыз бәрабәрсизлик доғр дур. Айдындыр ки,

$$|a| = |(a - b) + (+b)| \leq |a - b| + |b|;$$

демәли,

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

a -ны b илэ эвээ этсэк,

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |-(a - b)|;$$

бурадан

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

алындыгы айдындыр.

Бөйүк эһемиййэти олан белэ бир суал мейдана чыхыр: эдэд оху үзэриндэ ерлэшэн расионал эдэдлэр бүтүн эдэд охуну долдурурму? Бу суала бүтүн тэфэррүаты илэ чагаб вермэздэн эввэл гейд эдэк ки, расионал эдэдлэр, эдэдоху үзэриндэ һэр ердэ сыхдыр.

Расионал эдэдлэрин эдэд оху үзэриндэ һэр ердэ сых олмасы адланан бу хассэсини белэ дүшүнмэлийик: эдэд охуну истэнилэн ериндэ нэ гэдэр кичик бир парча көтүрсэк белэ, һэмин парчада һөкмән расионал эдэд вардыр. Тутаг ки, эдэд охуну истэнилэн ериндэ $[a, b]$ парчасы верилмишдир. Бурада a вэ b расионал эдэд вэ $b > a$ -дыр.

Исбат эдэк ки, һэмин парчада да һөкмән расионал эдэд вардыр.

Гейд эдэк ки, ики расионал эдэдин чэми, фэрги, һасили вэ нисбэтинин да расионал эдэд олдуғуну йохламаг чэтин дейилдир. Доғрудан да тутаг ки, a вэ b ихтияри ики расионал

эдэддир. Онда $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$ шэклиндэ көстэрэ билэрик.

Белэ олдугда тутаг ки, q_1 вэ q_2 натурал эдэдлэринин эн кичик ортаг бөлүнэни q -дүр: $(q_1, q_2) = q$, бундан башга $\frac{q}{q_1} = q_3$,

$\frac{q}{q_2} = q_4$ -дүр. Онда

$$a \pm b = \frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_3 \pm p_2 q_4}{q};$$

$$a \cdot b = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2};$$

$$a : b = \frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}.$$

Бурада $p_1 q_3 \pm p_2 q_4$, $p_1 p_2$, $q_1 q_2$, $p_1 q_2$, $q_1 p_2$ там эдэдлэр олдуғундан $a \pm b$, $a \cdot b$, $a : b$ расионал эдэдлэрдир. Бу тэклифин исбатындан сонра һэр бир $[a, b]$ парчасында да расионал эдэд олдуғуну исбат этмэк чэтин дейилдир. Мэсэлэн, $\frac{a+b}{2}$ расионал эдэдинин ихтияри $[a, b]$ парчасында олдуғуну исбат этмэк олар. Буну исбат этмэк үчүн $\frac{a+b}{2} - a > 0$, $b - \frac{a+b}{2} > 0$ олдуғуну исбат этмэк кифайэтдир.

$$\text{Догрудан да, } \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2} > 0,$$

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0.$$

Демәли, $\frac{a+b}{2}$ рационал әдәди $[a, b]$ парчасынын тән ортасындадыр. Бурадан белә бир нәтижә чыхыр: ихтияри ики рационал әдәдин арасында ени бир рационал әдәд вардыр, йә'ни рационал әдәдләр әдәд оху үзәриндә һәр ердә сыхдыр. Дейиләнләри екунлашдырсаг, рационал әдәдләрин ашағыдакы хассәләрә малик олдугларыны һөкүм әдә биләрик.

Рационал әдәдләрин хассәләриндән үчүнчүсү онларын тәнзим әдилмәсидир. Ики рационал әдәдин бәрабәрлийи онларын әдәд оху үзәриндә әйни бир нөгтәдә ерләшмәси илә тә'йин әдилир. Мәсәлән, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{4}$, $c = \frac{3}{6}$... рационал әдәдләри,

әдәд охунда $[0,1]$ парчасынын, әйни бир там орта нөгтәсидир. Рационал әдәдләрин бәрабәрлийини дә „=“ ишарәси илә кәс-тәрәчәйик. Дикәр тәрәфдән рационал әдәдләрин һәндәси тәс-виринә әсасланыб, ики рационал әдәд бөйүк ($>$) вә я кичик ($<$) ишарәси язмаг олар. Бу гайда илә рационал әдәдләр тән-зим әдилир. Дейиләнләри екунлашдырараг рационал әдәдләр ашағыдакы хассәләрә көрә тәнзим әдилир. 1. Ихтияри ики a , b рационал әдәдләри $a=b$, $a>b$, $b>a$ мүнәсибәтләриндән ял-ныз бирисини тә'мин әдир.

2. $a>b$, $b>c$ мүнәсибәтләриндән $a>c$ мүнәсибәти алыныр (бу хассә кәмийәтләрин бәрабәрсиззлийинин транзитивлик хас-сәси адланыр).

3. Әкәр $a>b$ оларса, онда әлә бир c рационал әдәди вар-дыр ки,

$$a>c \text{ вә } c>b$$

олур (бу хассә исә рационал әдәдләрин әдәд оху үзәриндә сых олмасы хассәсидир).

„Кичик“ аңлайышы „бөйүк“ аңлайышындан төрәйир. Догру-дан да ялныз $b>a$ оларса a рационал әдәди b -дән кичикдир ($a<b$) дейә биләрик. Бу һалда $a<b$ вә $b<c$ исә $a<c$ олар, чүн-ки бу тәклиф $c>b$ вә $b>a$ олмасы илә эквивалентдир. Она көрә дә $c>a$ олур. Бу исә $a<c$ олмасы демәкдир.

2. Рационал әдәдләр үзәриндә апарылан топлама вә чыхма әмәлләринин хассәләри

Рационал әдәдләри топлама вә чыхма әмәлләринин хассәлә-риндән бир нечәсини әсас гәбул әдәк. Бу хассәләр ашағыдакы-лардыр:

$$1. a + b = b + a.$$

Топлама эмәлиндә буна ердәйишмә хассәси дейилир.

$$2. (a + b) + c = a + (b + c).$$

Бу хассәйә ассосиативлик (группашдырма) хассәси дейилир.

$$3. a + 0 = a$$

4. Һәр бир расионал a әдәдинә көрә әлә $(-a)$ расионал әдәди вардыр ки,

$$a + (-a) = 0$$

олур.

Бу хассәләрә әсасланараг көстәрәк ки, расионал әдәдләр үзәриндә әдилән топлама эмәлинин тәрси олараг чыхма эмәли эканә гайда илә тә'йин әдилә биләр.

a илә b әдәдләринин фәргини тапмаг башга сөзлә әлә бир c әдәдини тапмагдан ибарәтдир ки, бу әдәди b -нин үзәринә кәлдикдә a алынсын, йә'ни

$$b + c = a$$

олсун.

Мәсәлән, тутаг ки, $c = a + (-b)$. Онда

$$\begin{aligned} b + c &= b + [a + (-b)] = b + a + (-b) = \\ &= a + [b + (-b)] = a + 0 = a \end{aligned}$$

олар.

Демәк көтүрдүйүмүз $c = a + (-b)$ әдәди a илә b -нин фәргиндән ибарәтдир. Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: бәлкә тәсадүфән сечдийимиз $c = a + (-b)$ әдәдиндән башга a илә b расионал әдәдләринин фәргиндән ибарәт олан бир расионал әдәд дә вардыр? Тутаг ки, бу расионал әдәдләриндән ихтияри бириси d -дир.

Онда

$$b + d = a \text{ олмалыдыр.}$$

Бу бәрабәрлийин һәр тәрәфинә $(-b)$ әдәдини әлавә этсәк

$$(b + d) + (-b) = a + (-b)$$

аларыг. Бурадан

$$(b + d) + (-b) = d + [b + (-b)] = d + 0 = d$$

олдуғундан,

$$d = a + (-b)$$

олмалыдыр, йә'ни a илә b -нин фәрги олан c биргиймәтли тә'йин әдилир. Бу фәрги $a - b$ илә ишарә әдирләр. Фәргин бу гайда илә тә'йин әдилмәсиндән бир сыра хассәләр әлдә әдилир: 3-чү хассәдән айдындыр ки, $0 + a = a$ олур, бу исә $0 = a - a$ олмасы демәкдир.

Демәк, 3-чү хассәни тә'мин әдән сыфырдан башга бир әдәд йохдур. Бурадан эйни заманда әдәд оху үзәриндә 0-а көрә верилмиш әдәдилә эканә симметрик әдәдин олмасы факты мейдана чыхыр.

Доғрудан да ики әдәдин фәрги еканә тә'йин олундуғундан 3-чү хассәйә әсасән $-a=0-a$ әдәди биргиймәтли тә'йин әдилір.

Әләчә дә $(-a)+a=0$ олдуғундан $a=-(-a)$ -дыр. Демәли a илә $(-a)$ әдәди гаршылығлы симметрикдир.

Инди исә

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

олдуғуну исбат әдәк.

$$\begin{aligned}(a+b) + [(-a) + (-b)] &= a + [b + (-a) + (-b)] = \\ &= a + [b + (-b) + (-a)] = a + [0 + (-a)] = \\ &= a + [(-a) + 0] = a + (-a) = 0\end{aligned}$$

олдуғундан

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

олмалыдыр.

Инди исә $a > b$, $a-b > 0$ олмасы фактындан $-a < -b$ чыхдығыны исбат әдә биләрик:

$$\begin{aligned}a-b &= a + (-b) = (-b) + a = (-b) + [-(-a)] = \\ &= (-b) - (-a)\end{aligned}$$

Бурадан $(-b) - (-a) > 0$ олдуғу айдындыр. Белә олдуғда $(-b) > (-a)$ вә я $(-a) < (-b)$ олачагдыр. Хүсуси һалда $a > 0$ олмасы фактындан $-a < 0$ олдуғу билаваситә айдын олур. Инди исә $a > b$, $c > d$ бәрабәрсизликләриндән истифадә әдиб $a+c > b+d$ олдуғуну көстәрмәк олар. Доғрудан да $a > b$ -дән $a+c > b+c$ олдуғу айдындыр. $c > d$ олдуғуна көрә исә $c+d > d+b$ бәрабәрсизлийн әлдә әдилір. Бәрабәрсизликләрин транзитивлик ганунуна көрә $a+c > d+b$ олмалыдыр. Бу исә әйни адлы бәрабәрсизликләри (йә'ни я $>$ вә я $<$ олан ики бәрабәрсизлийн) тәрәф-тәрәфә топлама гайдасыны ифадә әдир.

3. Рационал әдәдләр үзәриндә әдилән бөлмә вә вурма әмәлләринин хассәләри

Юхарыда рационал әдәдләр үзәриндә әдилән вурма вә бөлмә әмәлләринә аид ашағыдакы хассәләрин олдуғуну мүййән әтдик. Ики рационал a, b әдәдләринә көрә бу әдәдләрин һасили адланан үчүнчү бир рационал әдәд $(a \cdot b)$ һәмишә мөвчуддур вә ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1. $a \cdot b = b \cdot a$ (вурманын ердәйишмә хассә).

2. $(ab)c = a(bc)$ (вурманын группашдырма вә я ассоциативлик хассәси).

3. $a \cdot 1 = a$ (бүтүн рационал әдәдләрә көрә 1-ин хассәси).

4. Сыфырдан фәргли олан һәр бир рационал a әдәдинә көрә әлә $\frac{1}{a}$ әдәди (a -нын тәрси адланан әдәд) вардыр ки, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

олур. Вурманын тәрси олан бөлмә әмәли вурма әмәливин хас-

сәләри әсасында тә'йин әдилир. a вә b әдәдләринин гисмәти ($b \neq 0$) $c \cdot b = a$ вә я 1-чи хассәйә көрә $b \cdot c = a$, мүнәсибәтини өдәйән c әдәдинә дейилир.

Бурада һәр шейдән габаг ики ихтияри a илә b ($b \neq 0$) әдәдләринин гисмәти адланан үчүнчү c әдәдинин варлығы вә еканәлийи кими мәсәләләр мейдана чыхыр.

$c = a \cdot \frac{1}{b}$ әдәдини көтүрәк. Онда

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot b = a \left(\frac{1}{b} \cdot b \right) = a \cdot 1 = a.$$

Демәли, сечдийимиз $c = a \cdot \frac{1}{b}$ әдәди a илә b әдәдләринин гисмәтидир.

Белә бир суал ортая чыхыр: бәлкә $a \cdot \frac{1}{b}$ әдәдиндән башга a илә b -нин гисмәти адланан дикәр бир d әдәди дә мөвчүд-дур? Тутаг ки, a илә b -нин гисмәти ихтияри d -дир. Онда $d \cdot b = a$ олмалыдыр. Бу бәрабәрлийин һәр ики тәрәфини $\frac{1}{b}$ әдәдинә вурсаг,

$$(d \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

аларыг. Сол тәрәфи айрыча көтүрсәк, 2, 3, 4-чү хассәләрә көрә

$$(d \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = d \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b} \right) = d \cdot 1 = d.$$

Бу гайда илә, $d = a \cdot \frac{1}{b}$ олдуғуну исбат этмиш оларыг.

Демәли, $a \cdot \frac{1}{b}$ әдәди a илә b -нин ($b \neq 0$) еканә гисмәтидир.

Ики расионал әдәдин гисмәтинин биргиймәтлийиндән, 3-чү хассәни өдәйән 1-ин еканә олдуғу айдын олур.

Эләчә дә бурадан һәр бир әдәдин (сыфыр мүстәсна олмага) бир дәнә тәрс әдәди олдуғу билаваситә айдын олур, чүнки 1 илә a -нын биргиймәтли гисмәти $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ шәртиндән тә'йин әдилир.

Бурадан әйни заманда a илә $\frac{1}{a}$ -нын гаршылыглы тәрс олдуғлары да айдындыр.

5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (пайлама вә я дистрибутивлик хассәси). Биз юхарыда (§ 1-дә) вурма илә топлама әмәлләринин

пайлама хассэсини дэ тэ'йин этмишдик. Инди (элэчэ дэ эввэл-дэ) бу хассэдэн

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - bc$$

олдуғуну көрмэк чэтин дейилдир.

Доғрудан да, 5-чи хассэйэ көрө

$$(a - b) \cdot c + b \cdot c = [(a - b) + b] \cdot c = [a + [(-b) + b]] \cdot c = [a + 0] \cdot c = a \cdot c$$

алырыг. Демэли, $(a - b) \cdot c$ эдэди $a \cdot c$ илэ $b \cdot c$ эдэдлэринин фэргиндэн ибарэтдир, йэ'ни $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ олмалыдыр.

Бу хассэдэн истифадэ эдэрэк расионал эдэдин сыфра вэ сыфрын расионал эдэдэ насилинин сыфра бэрабэр ($b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0$) олдуғуну да исбат эдэ билэрик. Доғрудан да 5-чи хассэйэ көрө

$$(a + 0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b$$

олмалыдыр.

Дикэр тэрэфдэн $(a + 0) \cdot b = a \cdot b$ олдуғундан, $a \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b$ олмалыдыр, йэ'ни $0 \cdot b = a \cdot b - a \cdot b = 0$ олмалыдыр. Дикэр тэрэфдэн 1-чи хассэйэ көрө $b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0$ олур. Тэрсинэ, экэр $a \cdot b = 0$ вэ $b \neq 0$ исэ онда $a = 0$ олмалыдыр, чүнки $a = \frac{0}{b}$ олду-

ғундан вэ элэчэ дэ $0 = \frac{0}{b}$ (чүнки $0 \cdot b = 0$) олдуғундан гисмэтин биргиймэттилиийнэ көрө $a = 0$ олмалыдыр.

Инди исэ расионал эдэдлэрин бэрабэрсизликлэринин бир нечэ хассэсини ашкар эдэ билэрик.

6. Экэр $a > b$ вэ $c > 0$ исэ, онда $a \cdot c > b \cdot c$ олмалыдыр (бу хассэни билаваситэ эдэд оху үзэриндэ, һэндэси үсулла йохламаг олар).

Экэр $a > 0$ вэ $b > 0$ исэ, $a \cdot b > 0$ олдуғу билаваситэ көрүнүр. Инди

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

олдуғуну исбат эдэк. Доғрудан да 5-чи хассэйэ көрө

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Демэли, $(-a) \cdot b = 0 - (a \cdot b) = -(ab)$ олмалыдыр.

Инди исэ $a < 0$ вэ $b > 0$ олдуғда $a \cdot b < 0$ олдуғуну исбат эдэк. Ашкардыр ки,

$$a = -|a|, \quad b = |b|$$

олачагдыр. Бурадан индичэ исбат этдийимиз хассэйэ көрө

$$a \cdot b = (-|a|)|b| = -(|a| \cdot |b|) < 0.$$

алырыг.

Экэр $a > 0$ вэ $b < 0$ оларса, енэ дэ $ab < 0$ олар, чүнки $a = |a|$, $b = -|b|$ шэртиндэн истифадэ эдиб, эйни гайда илэ

$$a \cdot b = b \cdot a = (-|b||a|) = -(|b||a|) < 0$$

алмаг олар.

Экэр $a < 0$, $b < 0$ олдугда $a \cdot b > 0$ олар. Доғрудан да $a = -a$
 $b = -|b|$ олдугундан

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot (-|b|) = -[|a| \cdot (-|b|)] = -[(-|b|) \cdot (|a|)] = \\ = -[-(|b| \cdot |a|)] = |b||a| > 0$$

алыныр.

Биз бурада рационал эдэдлэрин 1—5 хассэлэринэ эсасла-
 нараг бир чох ени вэ эввэллэрдэ гəбул этдийимиз эсас хассэ-
 лэри мэнтиги сурəтдэ алдыг.

Бунлардан: $a = -(-a)$; $a > 0$ олдугда $-a < 0$ олмасы;
 фəргин, гисмэтин, 1-ин, 0-ын биргиймэтлилийи $(-a) \cdot b =$
 $= -(a \cdot b)$ олмасы вэ эн нəһайəт вурмада ишарə гайдасынын
 чыхарылышыдыр, йə'ни: a илэ b мұхтəлиф ишарəли олдугда
 $a \cdot b$ һасилинин мənфи, эйни ишарəли олдугда исə ab -нин мұс-
 бəт олмасыдыр.

§ 5. ОНЛУГ КƏСРЛƏРИН МƏНШƏИ ВЭ ТƏШƏККУЛУ

Натурал эдэдлэрин язылышында вэ дейилишиндэ онлуг сай
 системинин бəйүк əһəмийəти олдугу кими, кəсрлэрин дə мəх-
 рəчлэри он вэ онун гүввəтиндэн ибарəт олан кəсрлэр васитə-
 силə кəстəрилмəсинин чох əһəмийəти вардыр.

Онлуг сай системиндэ натурал эдэдлэрин язылыш вэ дейи-
 лишиндэ газанылан зəнкин тəчрүбэдэн сонра кəсрлэрин, мəх-
 рəчлэри он вэ онун гүввəтлэриндэн ибарəт олан кəсрлэрлэ
 (белə кəсрлэрə онлуг кəср дейилир) ифадə эдилə билмəsi,
 риязи фикрин гаршысында билаваситə чох гəдим заманлардан
 дурмушса да, мəхрəчлэри 60 вэ 60-ын гүввəтлэриндэн ибарəт
 олан кəсрлэр (алтмышлыг кəсрлэр), онлуг кəсрлəрдэн даһа
 эввəл ишлəдилмишдир. Бунун сəбəбини гисмən юхарыда изаһ
 этдик. Элдə олан мə'лумата кəрə Яхын Шəрг вэ Орта Асия
 алимлэри, XIV—XV əсрлəрдə астрономия сəһəсиндə апарылан
 һесабламаларда онлуг кəсрлэр ишлəтмишлэр.

Сəмəргəнд рəсəдханасынын рəиси Əл Каши (Əл Кашани)¹
 кəср эдэдлэрин ени шəклини, йə'ни онлуг кəсрлэри кəшф эт-

Гиясəддин Чəмшид Каши (Чəмшид ибн Мəс'уд ибн Мəһмуд) XV əсрин
 риязийəтчысы вэ астроному олмуш вэ Улуг-бəйин „Улдуз каталогунун“ языл-
 масында иштирак этмишдир. Əһтималь эдилдийинə кəрə 1436-чы илдə [вəфат
 этмишдир. Гиясəддинин эн бəйүк вэ əлми чəһəтдэн эн диггəтəшəйин ишлə-
 риндэн бири π —эдəдинин чох дəгиг гиймəтини тапмасыдыр:

$$\pi = 3,14159 \dots$$

Ашағыдакы формулу да Гиясəддин Кашани вермишдир:

$$\sum n^4 = \left(\frac{-1 + \sum n}{5} + \sum n \right) \cdot \sum n^2.$$

π һаггында əтрафлы мə'лумат алмаг истəйəнлэр академик З. И. Хəлило-
 вун „Даирəнин квадратурасы“ адлы китабына баһа билэр.

мишдир. Онун бу вэ башга сахәдә тәдгигаты „Һесабын ачары“ адланан¹ китабында топланмышдыр.

Әл Кашидән 150 ил сонра, Авропада Стевин² онлуг кәсри мунтәзәм шәкилдә ишләтмишдир.

Стевин һесаб әмәлләрини онлуг кәсрләрә тәтбиг әтмишдир. Онлуг кәсрин ишарәләндирилмәси мухтәлиф мәрһәләләр кечмишдир. Стевин бизим инди ишләтдийимиз веркүл әвәзиндә даирәчик ишләдир вә һәр онлуг ишарәсинин янында даирә чәкәрәк онун ичәрисиндә һәмин ерин нөмрәсини язырды.

Сонралар онлуг кәсрдә, тамы онлуг һиссәдән айырмаг үчүн тамын үстүндә „0“ ишарәси гоюлмуш, даһа сонра онлуг һиссәләри айырмаг үчүн тире ишарәси ишләдилмишдир.

XVI—XVII әсрләрдә белә онлуг кәсрләри мухтәлиф шәкилдә ишләдирдиләр.

Тамы онлуг һиссәләрдән айырмаг үчүн веркүл ишарәсини илк дәфә Исвечрәли Бюрки (1552—1632), алман астроному Кеплерә (1571—1630) яздығы мәктубунда ишләтмишдир. О, веркүлдән сонра кәлән онлуг ишарәләринин янында, даирә чәкәрәк онун ичәрисиндә һәмин ерин нөмрәсини язмышдыр.

Онлуг һиссәләрини тамдан айыран вә һазырда ишләтдийимиз веркүл ишарәси Кеплерин гәбул әдиб ишләтдийи мүкәммәл ишарәдир.

Һазырда вә кечмишдә Болгарыстанда вә бә’зи гәрб өлкәләриндә тамла онлуг һиссәләрини бунларын арасында, ортада язьлан нөгтә илә айырырлар. Белә ишарәнин әлверишли олмасы айдындыр.

Инди исә онлуг кәсрләр нәзәрийһәсиндән бәһс әдәк.

Онлуг кәсрләр нәзәрийһәси

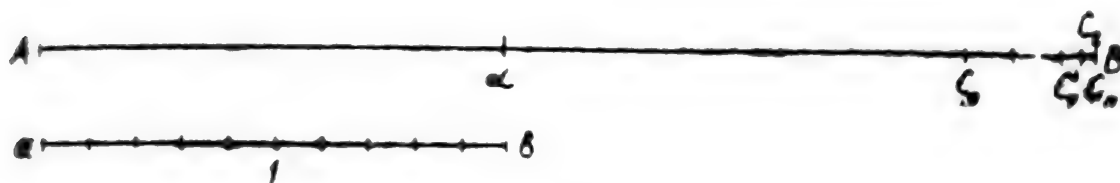
Тамын 10, 100, 1000, ..., $\frac{100000}{n}$... әдәдләринә бөлүнмәси истәр ени тәбиәтли әдәдләрин тапылмасында, истәрсә билдийимиз әдәдләрин тәбиәтинин өйрәнилмәсиндә мүстәсна әһәмийәтә маликдир.

Тутаг ки, мүәййән AB парчасыны (буну α илә ишарә әдәк) ваһид парча адландырдығымыз ab парчасы илә (бу парчаны 1 илә көстәрәк) өлчмәк тәләб олунур (5-чи шәкил).

¹ Профессор В. А. Розенфелд тәрәфиндән Әл Кашинин һәмин китабынын рус дилинә әдилән тәрчүмәси Москвада Техники-Нәзәри Дөвләт нәшрийятында чап әдилмишдир. Бу тәрчүмәнин ахырында китабын әрәбчә әл язысынын фото сурәтләри вә рус дилинә тәрчүмәйә верилән комментариләр чап әдлмишдир. Китабын бир гисми 1427-чи илдә, о бири гисми тәхминән бир аз габаг язылмышдыр.

² Симон Стевин (1548—1620) Фламанд мүһәндиси вә алимидир.

Тутаг ки, ваһид парча AB парчасында p дэфэ там ерләшир вә элавә C_0B артыг галыр (C_0B -йә биринчи галыг ады верәчәйик). Айдындыр ки, C_0B парчасы ab -дән гысадыр. Бурада p эдәди AB -нин тәгриби узунлуғу көтүрүләрсә C_0B узунлуғу



5-чи шәкил

гәдәр хәта этмиш оларыг. Даһа дәгиг өлчмәк үчүн ваһид парчаны 10 бәрабәр һиссәйә бөләрәк онун бир һиссәси $\left(\frac{1}{10}\right)$ илә C_0B парчасыны өлчәк. Тутаг ки, ваһид парчанын $\frac{1}{10}$ -и C_0B -дә p_1 дэфэ там ерләшир вә C_1B парчасы артыг галыр (икинчи галыг).

Демәли, AB парчасынын тәгриби узунлуғу

$$p + \frac{p_1}{10}$$

олачагдыр.

Шәклин өзүндән айдындыр ки, AB парчасынын индицә тә'йин этдийимиз узунлуғу (бу узунлуғ AC_1 -ин узунлуғуна бәрабәрди), әввәлчә тә'йин этдийимиз узунлуғундан (AC_0 -ын узунлуғундан) даһа дәгигдир (чүнки $AC_0 < AC_1 \leq AB$). Әкәр $\frac{1}{10}$ -ләр C_0B -дә p_1 там дэфэ ерләшсәйди вә галыг алынмасаиды онда AB парчасынын узунлуғу дәгиг тә'йин әдиләрәк

$$p + \frac{p_1}{10}$$

оларды. Бу эдәди p , p_1 кими язмағы шәртләшәк (охуянда дейирик: p там, онда p_1).

Айдындыр ки $p_1 \leq 9$, чүнки әкәр $p_1 = 10$ дәнә $\frac{1}{10}$ ваһид-дән ибарәт олсайды, онда ab ваһид парчасы C_0B -дә бир там дэфэ ерләшәрди вә белә олдугда AB -нин дәгиг узунлуғу $p + 1$ оларды.

Инди C_1B парчасынын галыг алындыгы халыны нэзэрдэн кечирэк. AB парчасыны даһа дэгийг өлчмэк үчүн C_1B парчасы үзэриндэ av ваһид парчасынын $\frac{1}{100}$ хиссэлэрини айыраг. Тутаг ки, бу хиссэ C_1B -дэ p_2 дэфэ ерлэшир.

Енэ дэ ики хал ола билэр. Биринчи дэфэ $\frac{1}{100}$ ваһид парчасы C_1B -дэ там дэфэ ерлэшэр, икинчи халда исэ p_2 дэфэ там ерлэшэр вэ элавэ C_2B парчасы гэдэр галыг (үчүнчү галыг) алынар.

Биринчи халда AB парчасынын дэгийг узунлуғу

$$p + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100}$$

эдэдинэ бэрабэр олачагдыр.

Икинчи халда исэ бу эдэд AB -нин узунлуғуну тэгрибэн ифадэ эдэчэкдир. Бу сонунчу эдэди

$$p, p_1, p_2$$

шэклиндэ ишарэ эдэк (бу p там йүздэ p_1, p_2 дейэ охунур). Бу эдэд AB парчасынын икинчи, даһа дэгийг узунлуғуну ифадэ эдир. Айдындыр ки,

$$p_2 \leq 9$$

олачагдыр, чүнки $p_2 = 10$ олса иди, онда C_1B -дэ 10 дэфэ $\frac{1}{100}$ ваһид ерлэшэрди, йэ'ни бир $\frac{1}{10}$ ваһид ерлэшэрди.

Белэ олса иди AB парчасынын дэгийг узунлуғу

$$p, p_1 + 1$$

ваһид оларды.

Инди тутаг ки, ваһид парчанын $\frac{1}{100}$ -и C_1B -дэ p_2 дэфэ ерлэшир вэ C_2B галыгы алынар. Белэ олдугда b парчасыны 1000 бэрабэр хиссэлэрэ бөлүб, ваһид парчанын $\frac{1}{1000}$ хиссэсини C_2B үзэриндэ айырмаг лазымдыр.

Тутаг ки, бу парча C_2B -дэ p_3 дэфэ ерлэшир. Экэр хэмин өлчмэ нэтичэсиндэ галыг алынмазса, онда AB парчасынын дэгийг өлчүсүнү

$$p + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \frac{p_3}{1000}$$

эдэди васитэсилэ ифадэ этмэк олар. Бу эдэди

$$p, p_1, p_2, p_3$$

шәклиндә язмағы шәртләшәк (p там миндә $p_1 p_2 p_3$ дейә оху-
нур). Әкәр бу ахырынчы өлчмә нәтижәсиндә енә дә галыг
алынарса, өлчү ваһидини даһа кичик (он миндә бир, йүз мин-
дә бир вә и. а.) һиссәләрә бөлүб галығы һәммин кичик һиссә
илә өлчә биләрик.

Беләликлә, өлчүнүн дәгиглийини һүдудсуз артырмаг олар.

Ваһидин $\frac{1}{10^n}$ һиссәси васитәсилә алынан $C_{n-1}B$ галығыны (n -чи
галығы) өлчсәк, енә дә ики һала тәсадүф әдәчәйик. Биринчи

һал ваһидин $\frac{1}{10^n}$ һиссәси, алынан $C_{n-1}B$ галығында там ерләш-
дийи һалдыр ки, бу һалда AB -нин узунлуғу алынан p, p_1
 $p_2 \dots p_n$ онлуг кәсри илә ифадә әдиләчәкдир. Икинчи һалда
исә $C_n B$ галығы алына биләр. Бу һал әкәр n -ин артмасы илә
давам әдәрсә, онда AB парчасынын узунлуғуну онлуг һиссәлә-
ринин сайы сонлу олан һеч бир онлуг кәсрдә ифадә әтмәк
мүмкүн олмур. Белә олдугда онлуг кәсрә *сонсуз онлуг кәср*
дейилир вә

$$p = \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_n}{10^n} + \dots$$

вә я

$$p, p_1 p_2 \dots p_n \dots$$

шәклиндә язылыр. Әкәр бу просес n -ин бир гиймәтиндә дая-
нар вә ваһид парчанын $\frac{1}{10^n}$ һиссәси сонунчу галыгда там дәфә
ерләшәрсә, онда AB парчасынын узунлуғу сонлу

$$p + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_n}{10^n}$$

вә я

$$p, p_1 p_2 \dots p_n$$

онлуг кәсри илә ифадә әдиләчәкдир.

Өлчү просесиндә һәр ики һала тәсадүф әдилир. Мәсәлән,
тутаг ки, парчанын узунлуғу $5\frac{3}{4}$ ваһидә бәрабәрдир. Онда

$$5\frac{3}{4} = 5\frac{75}{100}$$

олачагдыр, йә'ни парчанын узунлуғу сонлу

$$5\frac{3}{4} = 5,75$$

онлуг кәсрилә ифадә әдиләчәкдир. Парчанын узунлуғу $2\frac{1}{3}$ ва-
һид олдугда исә өлчүнүн нәтичәси

$$2,33 \dots 3 \dots$$

сонсуз онлуг кәсрдән ибарәт олачагдыр. Доғрудан да, әкәр $2\frac{1}{3}$ -и ифадә әдән сонлу онлуг кәсрдирсә, онда узунлуғу $\frac{1}{3}$

олан галыгда ваһидин $\frac{1}{10^n}$ һиссәси сонлу дәфә ерләшәрди,
йә'ни n -ин мүййән гиймәтиндә әлә бир b әдәди олмалыдыр
ки,

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{10^n}$$

олсун, йә'ни $10^n = 3b$ олмалыдыр. Бу исә мүмкүн дейилдир,
чүнки һеч бир n үчүн 3 әдәди 10^n -ин бөләни дейилдир. Демә-
ли, узунлуғу $2\frac{1}{3}$ ваһид олан парчанын узунлуғу сонлу онлуг
кәсрлә ифадә әдилә билмәз.

Инди мұһакимәмизин әввәлине гайыдаг. Верилмиш AB пар-
часыны өлчү ваһиди адландырдығымыз парча васитәсилә өлч-
дүкдә, өлчү просеси нәтичәсиндә бойлары кет-кедә кичилән
 $C_1B, C_2B, \dots, C_nB, \dots$ галыг парчалар алынырды. Белә ки,
 n артдыгча бу парчаларын сол учлары олан C_n нөгтәләри саға
доғру ирәлиләйирди. Она көрә дә AC_n парчасы n -ин мүййән
гиймәтиндән сонра я AB илә үст-үстә дүшмәли вә я кафи гә-
дәр AB -йә яхын олмалыдыр.

Бурадан зейһи олса да, белә нәтичә чыхартмаг олар ки,
верилмиш парчаны, верилмиш ваһид парча васитәсилә өлчмәк
үчүн өлчү просесини бә'зи һалларда гейри-мәһдуд давам эт-
дирмәк лазым кәлир. Бунун да нәтичәсиндә n сонсуз олараг
артдыгча парчанын узунлуғу, онун ардычыл тәғриби гиймәт-
ләринин яхынлашдығы узунлуг, дейә тә'риф әдилир. Она көрә
сонсуз онлуг кәсрләринин өйрәнилмәсинин мүстәсна әһәмийә-
ти вардыр.

Расионал әдәдләри ифадә әдән онлуг кәсрләрә көрә онлары
иһи гисмә айырмаг мүмкүндүр. Биринчи гисмә сонлу онлуг
кәсрләрлә ифадә әдилән расионал әдәдләри, икинчи гисмә исә
сонсуз онлуг кәсрләрлә ифадә әдилән расионал әдәдләри анд
әтмәк олар.

Мәсәлән,

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{7}{5} = 1,4 \text{ вә и. а.}$$

расионал әдәдләри биринчи гисмә анддир.

Үмүмийятла десэк, бүтүн сонлу онлуг кэсрлэр расионал эдэдләрдир, йә'ни һәр бир сонлу онлуг кэср $\frac{p}{q}$ шәклинә кәтирилә биләр. Белә ки, бурада $q = 10^n$ -дир. Догрудан да, тутаг ки,

$$p_0, p_1 p_2 \dots p_n$$

ихтияри онлуг кэсрдир. Айдындыр ки,

$$\begin{aligned} p_0, p_1 p_2 \dots p_n &= p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_n}{10^n} = \\ &= \frac{10^n \cdot p_0 + 10^{n-1} \cdot p_1 + 10^{n-2} \cdot p_2 + \dots + p_n}{10^n} \end{aligned}$$

шәклинә кәтирилә биләр. Бу һалда

$$10^n \cdot p_0 + 10^{n-1} \cdot p_1 + 10^{n-2} \cdot p_2 + \dots + p_n$$

натурал эдәдини p илә ишарә этсәк

$$p_0, p_1 p_2 \dots p_n = \frac{p}{10^n}$$

олдуғуну көрәрик.

Демәли, һәр бир сонлу онлуг кэср расионал эдәддир. Ләкин, әксинә, һәр расионал эдәд сонлу онлуг кэсрлә ифадә эдилә билмәз. Мәсәлән, $\frac{1}{3}$ расионал эдәди 0,333 ... сонсуз онлуг кэсри илә ифадә эдилик. Яхуд башга мисаллар кәтүрсәк эйни һалын тәкрат этдийини көрәрик:

$$\frac{1}{6} = 0,166666\dots;$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\dots;$$

$$\frac{122}{1100} = 0,1109090909\dots$$

Бу сонунчу мисаллары нәзәрдән кечирдикдә, алынган сонсуз онлуг кэсрләрин һамысына аид олан бир чәһәт дәрһал көзә чарпыр. Бу чәһәт һәммин сонсуз онлуг кэсрләрин онлуг ишарәләринин я дәрһал бир вә я бир нечә онлуг ишарәсинин сонсуз дәфә, я да бир нечә онлуг ишарәсиндән сонра бир групп онлуг ишарәләрин сонсуз дәфә тәкрат этдийиндән ибарәтдир. 0,333... онлуг кэсринин онлуг ишарәләринин сайы сонсуздур вә бу

онлуг ишарэлэрин һамысы 3-үн тәкрарындан ибарәтдир. 0,1666... сонсуз онлуг кәсриндә исә 1 онлуг ишарәсиндән сонра кәлән 6 енә дә сонсуз дәфә тәкрар әдир. 0,142857142857... сонсуз онлуг кәсриндә 142857 онлуг ишарәләри группә сонсуз дәфә тәкрар әдир. Белә онлуг кәсрләрә *дөври онлуг кәсрләр* дейилир.

Бүтүн бу дейиләнләри үмумиләшдирсәк, сонлу онлуг кәсрлә ифадә әдилмәйән һәр бир расионал әдәдин дөври онлуг кәсрлә ифадә олуна биләчәйини һөкм әдә биләрик.

Доғрудан да, тутаг ки, $\frac{p}{q}$ әдәди сонлу онлуг кәсрлә ифадә олунмаян бир ихтияри расионал әдәддир. Бу расионал әдәди ифадә әдән онлуг кәсрин дөври олдуғуну исбат әдәк.

Тутаг ки,

$$\frac{p}{q} = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \frac{p_3}{10^3} + \dots + \frac{p_n}{10^n} + \dots$$

сонсуз онлуг кәсрлә ифадә әдилибдир.

Бурада ардычыл бөлмә заманы онлуг системиндә галыгларың һеч бири сыфыр олмамалыдыр, чүнки галыглардан бири-си сыфыр олсайды, онлуг кәср сонлу оларды.

Айдындыр ки, һәмин галыглар 1, $(q-1)$ вә бу әдәдләр арасындакы там әдәдләрдән ибарәт ола биләр. Демәли, ардычыл бөлмә заманы галыгларың мүмкүн олан гиймәтләри 1-дән $q-1$ -ә кими натурал әдәдләр арасында ола биләр. Она керә дә q бөлкүдән сонра һәр һансы бир галыг енә тәкрар мейдана чыхачаг вә әйни гайда илә о бири галыглар да тәкрар әдәчәкдир.

Беләликлә, сонлу онлуг кәср шәклиндә көстәрилмәйән һәр бир расионал әдәд дөври онлуг кәср васитәси илә ифадә әдилир.

Бу расионал әдәдләр группәна сонлу онлуг кәсрлә ифадә әдилән расионал әдәдләри гошсаг вә һәр бир сонлу онлуг кәсрин онлуг ишарәләринин сонунә сыфырлар әлавә этмәклә дөври онлуг кәсрә кәтирилдийини нәзәрә алсаг бүтүн расионал әдәдләрин дөври онлуг кәсрләрлә ифадә әдилдийини һөкм әдә биләрик. Бу һөкмүн тәрси дә доғрудур, йә'ни бүтүн дөври онлуг кәсрләр расионал әдәдләрдән ибарәтдир (бу тәклифи бир гәдәр сонра һәндәси силсилә бәһсиндә исбат әдәчәйик).

§ 6. ИРРАСИОНАЛ ӘДӘДЛӘР

Верилмиш бир парчаны ваһид адланан дикәр парча илә өлчәмә просесиндә, верилмиш парчаның узунлуғуну ифадә әдән үч нөв онлуг кәсрә раст кәлдик. Бунлардан бириси сонлу, дикәри дөври (сонсуз), үчүнчүсү исә дөври олмаян сонсуз он-

луг кәсрдир. Биринчи ики нөв онлуг кәсрләрин рационал әдәд-
лә вә һәр бир рационал әдәдин биринчи ики нөв онлуг кәср-
ләрин бириси васитәси илә ифадә олуна билмәсини исбат этдик
вә беләликлә дәври онлуг кәсрләрин табиятини мейдана чы-
хардыг. Башга сөзлә десәк, дәври онлуг кәсрләр бизә мә'лум
олан әдәдләр синфинә аид олуб, бу синифдән кәнара чыхмаға
вә беләликлә дә ени табиятли әдәдләр тапмаға, бизә мә'лум
олан әдәдләр синфини кенишләндирмәйә имкан вермәди.

Инди исә дәври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрлән бәһс әдәк.
Биз бу онлуг кәсрләрә „әдәд“ дейә адландыра биләрикми?
Әкәр „әдәд“ сөзү алтында анчаг рационал әдәд баша дүшүрүк-
сә, дәври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрә әдәд дейә билмәрик,
чүнки әкәр дәври олмаян бир сонсуз онлуг кәср (буну α илә
ишарә әдәк) рационал әдәд олсайды, онда һәммин онлуг кәсри

$\frac{p}{q}$ шәклиндә көстәрә биләрдик, йә'ни $\alpha = \frac{p}{q}$ оларды. Бу исә
ола билмәз, чүнки һәр бир рационал әдәдин, о чүмләдән
 $\frac{p}{q}$ -нүн мүйәйән дәври онлуг кәср шәклиндә көстәрилә билдийи-

ни юхарыда исбат этдик. Бурадан, дәври олмаян сонсуз он-
луг кәсри „әдәд“ дейә адландырсаг, онда ени табиятли әдәд
әлдә әдәрик вә беләликлә әдәдләр синфини бир даһа кениш-
ләндирмиш оларыг. Лакин дәври олмаян сонсуз онлуг кәсрләр-
рә „әдәд“ ады вермәк үчүн һәр шейдән әввәл бу ени әдәдләр
рационал әдәдләрин табе олдуғу ганунлара табе олмагла мүйәй-
әйән мә'нада рационал әдәдләрә „яхын“ олмалыдыр. Гейд
әтмәк лазымдыр ки, „яхынлыг“ анлайышы бурада хүсуси мә'-
на дашыйыр вә кәләчәкдә изаһ олуначагдыр. Ени табиятли
әдәдләр, гейд этдийимиз кими, ваһид парчанын вә онун һәр
бир бәрабәр һиссәсинин $\left(\frac{1}{q}\right)$ һиссәси, q ихтияри натурал әдәд-

дир) верилмиш парчада там дәфә ерләшмәдийи һалда мейдана
чыхыр. Демәли, верилмиш парчанын узунлуғу бу һалда, ваһид
парчанын һәр бир $\frac{1}{q}$ һиссәсинин там сайына бәрабәр олмур.

Она көрә дә дейилир ки, верилмиш парча ваһид парча васи-
тәсилә өлчүлә билмир. Башга сөзлә, верилмиш парча илә ва-
һид парча ортаг өлчүсүздүр дейилир, чүнки бу һалда өлчү
просесиндә верилмиш парчада вә ваһид парчада там дәфә ер-
ләшән башга бир ортаг парча тапмаг мүмкүн дейилдир. Белә-
ликлә, узунлуғу $\frac{p}{q}$ шәклиндә көстәрилә билмәйән һәр бир
парчая ваһид парча илә өлчүлә билмәйән вә я ваһидлә ортаг
өлчүсүз парча дейилир.

Инди исә узунлуғу a вә b олан ики парча кәтүрәк. Тутар ки, узунлуғу c олан бир парча узунлуғу a олан парчада p дәфә, узунлуғу b олан парчада исә q дәфә ерләшир. Онда ашкардыр ки,

$$c = \frac{a}{p}$$

вә

$$b = q \cdot \frac{a}{p} = \frac{q}{p} \cdot a$$

олар. Белә олдуғда узунлуғу a вә b олан парчалара ортаг өлчүлү дейилир. Бурада ортаг өлчүнүн узунлуғу $\frac{a}{p}$ -дир. Һә-

мин парча узунлуғу a олан парчада p дәфә, узунлуғу b олан парчада исә q дәфә ерләшир.

Араларында

$$b = \frac{q}{p} \cdot a$$

кими мүнәсибәт ифадә эдилә билмәйән ики a вә b парчая ортаг өлчүсүз парчалар дейилир. $a = 1$ олдуғда юхарыда дейилән ваһид парча илә ортаг өлчүлү вә ортаг өлчүсүз b узунлуғлу парча алыныр. Белә ки, биринчи һалда b -ни

$$b = \frac{q}{p}$$

шәклиндә кәстәрмәк мүмкүн олур. Икинчи һалда исә белә кәстәрмәк мүмкүн олмур. Бу дейиләнләри нәзәрә алараг рационал әдәдләрлә ифадә олуна билмәйән сонсуз онлуғ кәсләр иррационал¹ әдәд адландырылмышдыр.

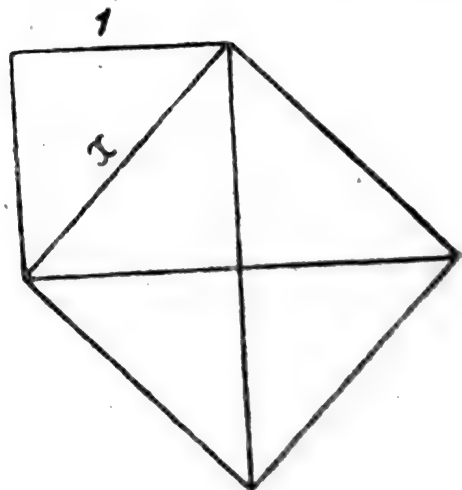
Ортаг өлчүсүз парчаларын чох гәдим заманларда Юнаныстанда, (тәхминән 2500 ил бундан әввәл) Пифагорун эли мәктәбиндә кәшф әдилмәси элм әләминдә бөйүк һадисәдир. Белә бир фактын дәрк әдилмәси исә чох күман ки, юнаныларын риязийята кәтирдийи чидди риязи методларын башланғычы олмушдур. Бөйүк әзмлә гәйд әтмәк олар ки, бу кәшф риязийятын, әлчә дә фәлсәфәнин кәләчәк инкишафына әз тәсирини кәстәрмишдир. Пифагорчулар илк дәфә квадратын тәрәфи илә диагоналинын ортаг өлчүсүз парчалар олдуғуну сүбут әтдиләр². Олар кәстәрмиләр ки, квадратын тәрәфи илә диагоналинын ортаг өлчүсүнү тапмаг просеси сонсуз просес-

¹Иррационал (латынча irrationalis) ортаг өлчүсүз демәкдир.

² Бу һагда академик З. И. Хәлиловун „Исанлар индики риязийята нечә кәлиб чымышлар“ китабчасында гәйд әдилмишдир.

дир. Бурада һәр дэфә эйни мәсәлә, тәрәфләри һүдудсуз ола-
раг кичилән квадрат үзәриндә һәлл әдилир. Белә бир өлчмә
нәтижәсиндә ялныз дөври олмаян сонсуз онлуг кәср алына
биләр. Бу онлуг кәср исә тәрәфи өлчү ваһиди көтүрән квад-
ратын диагоналынын узунлуғу дейә гәбул олунарса, онда ра-
сионал әдәдләр даирәси кенишләниб күлли мигдарда мәсәлә-
ләрин һәллине йол ачмыш олар. Бу мәсәләләрдән ән гәдим
чеврәнин узунлуғунун өз радиусу илә өлчүлмәси мәсәлә-
сидир. Юнанлыларын ортаг өлчүсүз парчалары тарихән чох
тез кәшф этмәләри вә бурада ортая чыхан чәтинликләрин
дәрк әдилмәси, эйни заманда риязийятда узун сүрән бир дур-
ғунлуға да сәбәб олмушдур. Бүтүн юнан риязийятына хас
олан, риязийяты һәндәсәләшдирмә йолу иррасионал әдәдләр
һесабынын инкишафына мане олмуш вә тәхминән 2 мин ил
әдәд анлайышынын лабүд олан инкишафынын йолуну кәс-
мишдир. Она көрә дә юнанлыларын, иррасионал әдәдләри де-
йил, ялныз ортаг өлчүсүз парчалары кәшф этдикләрини де-
мәк даһа дүзкүн оларды. Юнан риязи ән'әнәләрини Яхын вә
Орта Шәргин риязи ән'әнәләриндән фәргләнديرән әсас чә-
һәтләрдән бири дә бу чәһәтдир. Бир әср әввәл Орта вә Яхын
Шәргдә бөйүк һесаблама техникасы инкишаф этдирилдийи
һалда, юнанлылар иррасионал әдәдләрин инкишаф йолуну
сырф һәндәсә аксиомларында көрүрдүләр. Бүтүн бу маниәлә-
рә бахмаяраг Пифагордан Платона гәдәр олан дөвр әрзиндә
иррасионал әдәдләрин өйрәнилмәси риязийятда мүһүм тәрәгги
һесап әдилә биләр. Беләликлә, иррасионал әдәдләрин мәншәи
вә инкишафы квадратын тәрәфи
илә диагоналынын ортаг өлчүсүз
олдуғуну мүәййән әдән вахтдан
башлайыр. Квадратын тәрәфи илә
диагоналынын ортаг өлчүсүз
олдуғуну көстәрән чохлу исбат-
лар вардыр¹. Биз башга бир исба-
та мүрачиәт әдәк. Квадратын тә-
рәфини өлчү ваһиди гәбул әдәк
(6-чы шәкил), йә'ни квадратын
тәрәфинин узунлуғуну 1 гәбул
әдәк. Диагоналынын узунлуғуну
исә x илә ишарә әдәк.

Бу гәдим шәкилдән көрүндү-
йү кими квадратын диагоналы
үзәриндә гурулан квадратын са-
һәси, ики тәрәфи үзәриндә гурулан квадратларын саһәлә-
ри чәминә бәрабәрдир. Диагонал үзәриндә гурулам квадратын



6-чы шәкил

¹ Булардан Пифагор мәктәбинә аид олан исбат, академик З. И. Хәли-
ловун „Даирәнин квадратурасы“ адлы китабында гейд олуномушдур.

сахәси x^2 , бир тәрәф үзәриндә гурулан квадратын сахәси исә 1 олдуғу үчүн

$$x^2 = 1 + 1 = 2$$

олар.

Квадраты 2-йә бәрабәр олан x -и $\sqrt{2}$ илә ишарә әдәк¹.
 $x = \sqrt{2}$.

Гейд әтмәк лазымдыр ки, там әдәдләр ичәрисиндә квадраты 2 олан там әдәд йохдур, чүнки $1^2 < 2$; $2^2 = 4$ исә 2-дән бөйүкдүр. Инди исбат әдәк ки, квадраты 2 олан әдәд бүтүн расионал әдәдләр ичәрисиндә йохдур². Бунун әксини фәрз әдәк. Тутаг ки, расионал әдәдләр ичәрисиндә әлә бир $\frac{p}{q}$

расионал әдәди вардыр вә бу һалда $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ -дир.

Биз һәмишә $\frac{p}{q}$ кәсрини ихтисар олмаян кәср кәтүрә биләрик, әкс һалда әввәлчә ихтисар әдәрәк ихтисар олмаян $\frac{p}{q}$ кәсри шәклинә кәтирә биләрик.

Айдындыр ки, бу һалда

$$p^2 = 2 q^2$$

олачагдыр. Бу бәрабәрлийин сағ тәрәфи чүт әдәддир. Онда сол тәрәфи олан p^2 әдәди дә чүтдүр. Белә олдуғда p әдәди дә чүт олмалыдыр.

Әкәр тәк әдәд олсайды онда p^2 әдәди дә тәк оларды.

Доғрудан да тутаг ки,

$$p = 2n + 1 \quad (\text{бурада } n=0, 1, 2, \dots)$$

тәк әдәддир. Онда

$$p^2 = (2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1)$$

олмалыдыр. Тәркиб ганунуну ардычыл тәтбиг әтсәк

$$\begin{aligned} p^2 &= (2n + 1) \cdot 2n + (2n + 1) \cdot 1 = 2n \cdot 2n + 2n + 2n + 1 = \\ &= 2n \cdot 2n + 2 \cdot 2n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

аларыг. Демәли p^2 тәк әдәддир. Бу исә p^2 -ин чүт олмасы шәртинә зиддир. Ачыг-айдын көрүнән бу зиддийәт p -нин чүт олдуғуну кәстәрир. Она көрә дә

$$p = 2n$$

олмалыдыр. Бурадан $p^2 = 4n^2$ олур.

Демәли

$$4n^2 = 2q^2$$

¹ $\sqrt{\quad}$ ишарәсини илк дәфә Родолф ишләтмишдир (Rudolff 1500-чү илдә анадан олмушдур). Бәзиләринин фикринә көрә көкүн мәншәи γ һәр-фидир.

² Ики мин илдән чох тарихи олан бу гиймәтли исбат Эвклид тәрәфиндә верилмишдир.

вэ я:

$$q^2 = 2n^2.$$

Юхарыдакы мұһакимәйә әсасән q чүт әдәд олмалыдыр. Белә олдугда 2 әдәди, p вэ q әдәдләринин ортаг бөләнидир.

Бу исә $\frac{p}{q}$ -нүн ихтисар олмаян кәср олмасы шәртинә тамами-лә зиддир.

Демәли, квадраты 2-йә бәрабәр олан һеч бир расионал әдәд йох дур.

Белә һалларда әввәлләрдә олдуғу кими ени әдәд яратмаг зәрурәти мейдана чыхыр. Һәр шейдән габаг ени әдәди нечә яратмаг суалына чаваб вермәлийик. Буну $\sqrt{2}$ үзәриндә нүмайиш этдирәк. Әввәлчә $\sqrt{2}$ -нүн тәгриби гиймәтләрини тапаг. $\sqrt{2}$ -нүн тәгриби гиймәти олан онлуг кәсрләрин ихтияри n -чи ердә дуран онлуг ишарәсинин үмуми ифадәсини билмәсәк дә ардычыл сурәтдә, истәдийимиз онлуг ишарәләрини һесаблая биләрик:

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$$

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0264$$

$$(1,414)^2 = 1,999396 < 2 < (1,415)^2 = 2,002225$$

$$(1,4142)^2 = 1,99996164 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024449$$

вэ и. а.

Беләликлә, $\sqrt{2}$ -ин тәгриби гиймәтләриндән дүзәлмиш ики сыра¹

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135;... (1)

вэ

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214; 1,4142136;... (2)

әдәдләринин һеч биринин квадраты 2-йә бәрабәр олмур. Эйни гайда илә онлуг ишарәләрин сайыны истәдийимиз гәдәр давам этдирсәк енә дә квадраты 2-йә бәрабәр олан сонлу онлуг кәср тапылмаз. Бурада бириччи сыра әдәдләр әксийи илә икинчи сыра исә артығы илә $\sqrt{2}$ -нүн тәграби гиймәтләриндир. Бу әдәдләрин квадратлары

1; 1,96; 1,981; 1,999396; 1,99996164;...

вэ

4; 2,25; 2,064; 2,00225; 2,00024449;...

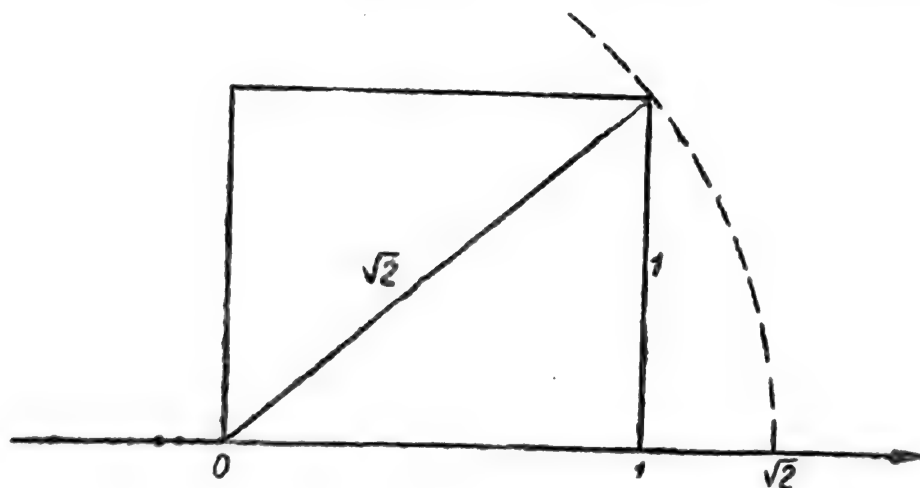
һәр ики тәрәфдән 2-йә яхынлашыр. Биринчи сыра арта-арта (ашағыдан), икинчи сыра әдәдләри исә азала-азала (юхарыдан) 2-йә яхынлашыр. Беләликлә $\sqrt{2}$, ашағыдан квадраты кет-

¹ Бу әдәдләр $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ вэ и. а. дәгиглийи илә $\sqrt{2}$ -ин тәгри-

би гиймәтләри кими тапылыр.

дикчә 2-йә яхынлашан (йә'ни онлуг ишарәләринин сайы, артдыгча 2 илә олан фәргләри азалан) биринчи сыра яхуд юхарыдан (йә'ни онлуг ишарәләринин сайы артдыгча енә дә 2 илә олан фәргләри азалан) 2-йә яхынлашан икинчи сыра әдәдләр васитәсилә ифадә әдилә биләр. Нәр ики сырадакы әдәдләр дәври олмаян сонсуз онлуг кәср олачагдыр. (1) әдәдләр сырасыны көтүрәк. Бу әдәдләрин артыгы илә көтүрүлән (2) сырасынын әдәдләриндән үстүн чәһәти орасындадыр ки, (1) әдәдләрин онлуг ишарәләри артдыгча әввәлки груп онлуг ишарәләри сахланылыр. (2) әдәдләринин исә онлуг ишарәләри артдыгча әввәлки онлуг ишарәләр группу дәйишилир. Она көрә дә $\sqrt{2}$ -нү бүтүн онлуг ишарәләри бир дәфәлик көтүрүлән 1,4142135... әдәди шәклиндә тә'йин әдәк. Бу әдәди бирдәфәлик сонсуз онлуг кәср шәклиндә язмәг олмаса да, онун онлуг ишарәләрини тәдричән тапмаг имканы вардыр. Айдындыр ки, $\sqrt{2}$ -нүн истәр биринчи сыра (1) гиймәтләри, истәрсә дә икинчи сыра (2) гиймәтләринин һәр бири сонлу онлуг кәсләр олдуғу үчүн бу гиймәтләр әдәд охунда көстәрилә биләр. Белә бир суал ортая чыхыр. Нәмин сонсуз процес нәтичәсиндә $\sqrt{2}$ -нү ифалә әдән (демәк $\sqrt{2}$ өзү) сонсуз онлуг кәср әдәд охунун мүййән бир нөгтәси васитәсилә көстәрилә биләрми?

Бу суала җаваб вермәк үчүн әдәд охунун $[0,1]$ парчасы үзәриндә квадрат гуруб пәркар васитәсилә онун диагоналынын узунлуғуну (йә'ни $\sqrt{2}$ -нү; бу узунлуг юхарыда көстәрилән сонсуз өлчү просесиһин нәтичәсиндә тапылмышдыр)



7-чи шәкил

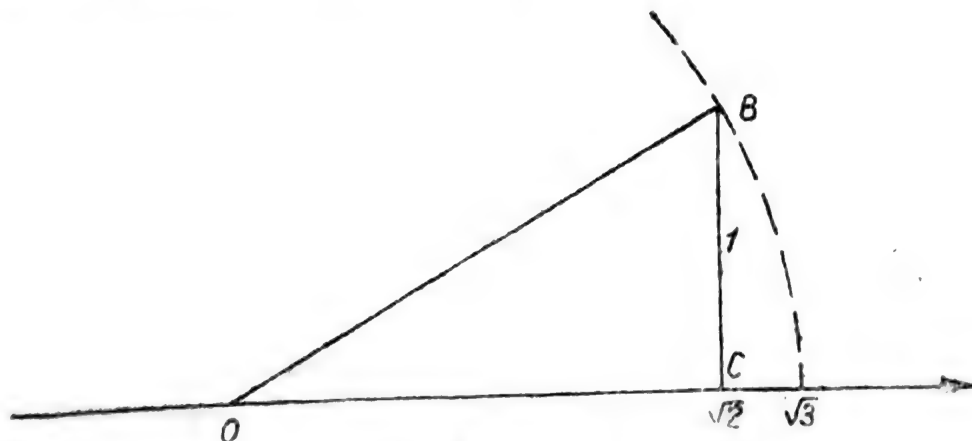
әдәд оху үзәриндә, бир учу сыфыр нөгтәсинә дүшмәклә айыраг. Онда нәмин парчаһын сон учу $\sqrt{2}$ -нү әдәд оху үзәриндә ишарә әдәчәкдир (7-чи шәкил).

Шәкилдән расионал әдәдләр чохлауғунун әдәд охуну тамам долдурмадығы гәнаәти һасил әдилир.

Белә бир суал мейдана чыхыр: нәдәндир ки, һәр ердә сых олан расионал эдәдләр чохлуғу эдәд охуну долдурмаға гадир дейилдир?

Эдәд оху үзәриндә иррасионал эдәди көрмәк вә я иррасионал эдәди расионал эдәддән айырмағ һеч бир вәһлә мүмкүн дейилдир. Ялмыз ортаг өлчүсүз парчаларын дәрин вә дүзкүн риязи маһийәти белә бир нәтичәйә кәтириб чыхармышдыр. Ваһид парча илә ортаг өлчүсүз олан һәр бир парчаны бир учу сыфыр нөгтәсиндә олмағла эдәд оху үзәриндә айырмамыш олсағ, онун дикәр учунун дүшдүйү нөгтә иррасионал нөгтәдән ибарәт олачағдыр. Мәсәлән, квадраты 3-ә бәрабәр олан эдәдин дә иррасионал олдуғу вә эдәд охунда ерләшдиһини әһни гайда илә исбат эдә биләрик (бу эдәди $\sqrt{3}$ илә ишарә эдәк)¹.

Бунун үчүн эдәд оху үзәриндә узунлуғу $\sqrt{2}$ олан парча кәтүрүб, онун үзәриндә катетинин узунлуғу ваһид олан бир дүзбучағлы үчбучағ гурағ (8-чи шәкил).



8-чи шәкил

Пифагор теореминә көрә

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (CB)^2 = 2 + 1 = 3$$

яза биләрик². Демәли, $OB = \sqrt{3}$ -дүр.

Эдәд оху үзәриндә пәркар васитәсилә OB -нин узунлуғу бөйүклүкдә парча айырсағ³ (бир учу сыфыр нөгтәсиндә олмағ шәртилә), һәмин парчанын сон учу эдәд оху үзәриндә $\sqrt{3}$ -нү көстәрән нөгтәдән ибарәт олар. Белә нөгтәләрден чох көс-

¹ 425-чи илдә Сирендә яшамыш Теодорос (Theodorus) илк дәфә иррасионаллығын ялмыз $\sqrt{2}$ -йә аид олмайыб $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ -ни (йәһни квадраты 3, 5, ..., 17 олан эдәлләрин) дәхи иррасионал олдуғуну кәстәрмишдир. Бәзи тарихчиләр Платонун Теодоросдан һәндәсә өйрәндийини гәйд эдирләр.

² Биз ялмыз бурада Пифагор теореминдән истифада эдирик.

³ Шүбһәсиз ки, пәркарла ишләй н заман $\sqrt{3}$ -үн эдәд оху үзәриндә еринин дүзкүн тапылмасы тәчрүб синдә мүәййән хата варыр. Лакин нәзәри чәһәтдән эдәд оху үзәриндә белә бир нөгтәнин варлығы инкар әдилмәз бир һәгигәтдир.

тәрмәк олар. Бүтүн бу һәндәси тә'рифләр алтында кизләнән иррасионал әдәдин керчәк маһийәти кәләчәкдә ардычыллыглар бәһсиндә дәгисләшдириләчәкдир. Бу хүсуси мисаллара әсасән сөйләдийимиз мүлаһизәләрдән сонра иррасионал әдәдин юхарыда вердийимиз үмуми тә'рифинә мүрачиәт әдәк. Гейд әтдийимиз кими дөври олмаян һәр бир сонсуз

$$\alpha = p, p_1 p_2 p_3 \dots p_n \dots$$

онлуг кәсрә иррасионал әдәд дейилир.

$\sqrt{2}$ кими $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... әдәдләри дә дөври олмаян онлуг кәсрләрлә ифадә олуна билир. Лакин бу һеч дә о дәмәк дейилдир ки, иррасионал әдәдләр ялныз көкү расионал олмаян әдәдләрдән ибарәтдир вә я бүтүн иррасионал әдәдләрин мәнбәи көкләрдир. Бу, янлыш фикирдир.

Көкдән алына билән вә я алына билмәйән һәр бир дөври олмаян сонсуз онлуг кәср иррасионал әдәддир. Иррасионал әдәдләрин расионал әдәдләрә гошулмасындан алынан әдәдләр чохлуғуна *һәгиги әдәдләр* дейилир. Расионал әдәдләрин дөври онлуг кәсрләрлә ифадә әдилә билдийини нәзәрә алыб *һәгиги әдәди сонсуз онлуг кәср дейә тә'риф* әдә биләрик. Гейд әтмәк ләзымдыр ки, мүсбәт расионал әдәдләрдән мәнфи расионал әдәдләрә кечдийимиз кими, мүсбәт иррасионал әдәдләрдән дә мәнфи иррасионал әдәдләрә кечә биләрик.

Беләликлә әдәд оху тамамилә „долдурулмуш“ олур. *һәгиги әдәдләр әдәд оху үзәриндә нәинки сыхдыр, һәтта долудур.*

Расионал әдәдләрдә олдуғу кими, иррасионал әдәдләрин дә әдәд оху үзәриндә тәнзим әдилмәси (бөйүклүк вә кичиклийи) һабелә бу әдәдләр үзәриндә һесаб әмәлләринин апарылмасы кими мәсәләләрин мүсгәсна әһәмийәти вардыр. Иррасионал әдәдләрә аид бу мәсәләләрин тәһлилинә кечәк.

Иррасионал әдәдләрин хассәләри

1. Иррасионал әдәдләри тәнзим әтмәк олар.

Мә'лум олдуғуна көрә һәр бир $\frac{p}{q}$ расионал әдәдини дөври сонсуз онлуг кәсрлә ифадә әтмәк мүмкүндүр:

$$\frac{p}{q} = p_0, p_1 p_2 \dots p_n \dots$$

Бу онлуг кәсрин мүәййән онлуг ишарәсиндән сонра кәлән онлуг ишарәләрини нәзәрә алмасаг, онда $\frac{p}{q}$ расионал әдәдинин юхарыда гейд әтдийимиз кими әксийи илә тәгриби гий-

мәтини әлдә әдирик. Мәсәлән, онлуг кәсри k -чы ишарәдә кәс-
сәк

$$p_0, p_1 p_2 \dots p_k = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_k}{10^k} \leq \frac{p}{q}$$

алынар.

Бурада $k=1, 2, 3, \dots$ гиймәтләрини версәк $\frac{p}{q}$ расионал
әдәдинин әксийилә ашағыдакы гиймәтләрини әлдә әдирик:

$$a_1 = p_0, p_1; a_2 = p_0 p_1 p_2; \dots; a_n = p_0 p_1 p_2 \dots p_n; \dots$$

Әкәр бу тәгриби гиймәтләрин ахырынчы онлуг ишарәләринин
үзәринә бир әлавә этсәк $\frac{p}{q}$ расионал әдәдинин артығы илә
тәгриби гиймәтләрини әлдә әдәрик:

$$a_1^1 = p_0, p_1 + \frac{1}{10}; a_2^1 = p_0, p_1 p_2 + \frac{1}{10^2}; \dots;$$

$$a_n^1 = p_0, p_1 p_2 \dots p_n + \frac{1}{10^n}, \dots$$

Бурада $a_n^1 > \frac{p}{q}$ олачағы айдындыр.

Бу гайданы иррасионал әдәдләрә дә тәтбиг әдәк. Ихтияри
иррасионал әдәд кәтүрәк:

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Юхарыда олдуғу кими, бу иррасионал әдәдин әксийи илә
тәгриби гиймәтләрини

$$a_1 = \alpha_0, \alpha_1; a_2 = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2; \dots; a_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n; \dots$$

вә артығы илә тәгриби гиймәтләрини исә

$$a_1^1 = \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}; a_2^1 = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{10^2}; \dots;$$

$$a_n^1 = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}; \dots$$

шәклиндә тә'йин әдәк вә

$$a_n < \alpha < a_n^1$$

олдуғуну гәбул әдәк.

Индийә гәдәр биз ялныз расионал әдәдләри мугайисә
әтмәйи бачарырдыг. Иррасионал әдәдләри бир-бири илә вә
иррасионал әдәдләри расионал әдәдләрлә мугайисә әтмәйин нә
демәк олдуғуну билмирдик. Она көрә дә иррасионал әдәди
өзүнүн сонлу онлуг һиссәләри илә мугайисәсини гәбул әтмә-

ли олдуг. Үмүмүи Һалда Һеч олмаса бириси иррасионал олан ики Һәгиги эдәдин мүғайисәси ашағыдакы кими тә'йин эдилир. Тутаг ки,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

вә

$$\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

ихтияри Һәгиги эдәдләрди (бурада $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$; $\beta_0, \beta_1 \dots \beta_n \dots$ там эдәдләрди). Әкәр $\alpha_0 > \beta_0$ вә я $\alpha_0 = \beta_0$

олдугда

$\alpha_1 > \beta_1$ вә я $\alpha_0 = \beta_0$ вә $\alpha_1 = \beta_1$ олдугда $\alpha_2 > \beta_2$ вә и. а. оларса, онда $\alpha > \beta$

олдугуну гәбул эдәчәйик. Мәсәлән, чеврәнин узунлуғунун диаметрә нисбәтини ифадә эдән π эдәдилә (бу эдәд иррасионал эдәддир Һә Һеч бир там эдәдин истәнилән дәрәчәдән көкү ола билмәз; белә эдәдләрә *трансцендент эдәдләр* дейилир)¹ йә'ни дөври олмаян сонсуз 3,14... онлуг кәсри илә $\sqrt{10} = 3,16 \dots$ иррасионал эдәдини мүғайисә этдикдә көрүрүк ки, бу эдәдләрин там һиссәләри ($\alpha_0 = \beta_0$) вә биринчи онлуг ишарәләри ($\alpha_1 = \beta_1 = 1$) бәрәбәрди. Икинчи онлуг ишарәләриндән исә, $\beta_3 = 6 > 4 = \alpha_3$ -дир. Она көрә дә $\sqrt{10} > \pi$ олур.

Бу гайда, ики чүр онлуг кәсрлә ифадә эдилән расионал эдәдләрдән башга, галан бүтүн расионал эдәдләр үчүн дә доғрудур. Доғурдан да², 0,2300... вә 0,2299... эдәдләри эйни расионал эдәдләрин онлуг кәсрләрлә ифадәсидир, лакин онлуг ишарәләри бәрәбәр дейилди. Айдындыр ки, әкәр $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ олса онда $\alpha > \gamma$ олар.

Ики

$$\begin{array}{l} \alpha_0, \alpha_1 \dots, \alpha_{n-1} \alpha_n \alpha_{n+1} \dots \\ \beta_0, \beta_1 \dots, \beta_{n-1} \beta_n \beta_{n+1} \dots \end{array}$$

Һәгиги эдәдин бәрәбәрлийи тә'рифини верәк:

1) там вә бүтүн онлуг ишарәләри бәрәбәр олан

$$\alpha_i = \beta_i \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

2) тамлары вә мүәййән онлуг ишарәйә гәдәр онлуг ишарәләри бәрәбәр олан

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1},$$

вә бу онлуг ишарәсиндән билаваситә сонра кәлән онлуг ишарәләри уйғун олараг бир-бириндән бир ваһид артыг ($\alpha_n = \beta_n + 1$). Һабелә биринчи Һәгиги эдәдин сонра кәлән онлуг ишарәләринин һамысы сыфыр, икинчи Һәгиги эдәдин уйғун онлуг ишарәләри исә доғгузлуглардан ибарәт олан

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = 0.$$

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+2} = \dots = 9$$

¹ Бу һагла академик З. И. Хәлиловун „Дәирәнин квадратурасы“ китабчасында гейд олунубдур.

² Енә орда.

һәгиги әдәдинә барабәр һәгиги әдәдләр дейилир. Мәсәлән,
 $1,120... 000... = 1,11999 ...999$

вә я

$100,000... 99,999... 999...$

әдәдләри барабәр һәгиги әдәдләрдир. Айдындыр ки, әкәр $\alpha = \beta$ вә $\beta = \gamma$ исә онда $\alpha = \gamma$ олар.

Беләликлә, ихтияри һәгиги әдәдләр үчүн ашағыдакы нәти-
чәләри әлдә этдик:

1) ихтияри ики α вә β һәгиги әдәдләри я бир-биринә бә-
рабәрдир: $\alpha = \beta$ вә я $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ барабәрсизликләриндән бири
өдәнилир.

2) һәр үч α , β , γ һәгиги әдәдләри арасында ашағыдакы мү-
насибәт доғрудур; әкәр $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ исә, онда $\alpha > \gamma$ олар. Бу хас-
сәләрә малик олан һәр чүр әдәдләр чохлуғуна *тәнзим әдил-
миш чохлуғ* дейилир. Айдындыр ки, һәгиги әдәдләр чохлуғу
тәнзим әдилмиш чохлуғдур. Иррационал әдәдләри рационал
әдәдләрин көмәйи илә тәнзим әдә билдик. Дәриндән олмаса
да, һәр бир иррационал әдәдә бир иррационал әдәди ифадә
әдән сонсуз онлуғ кәсрин сонлу һиссәләри васитәсилә истә-
нилән гәдәр яхынлаша биләчәйимизи көстәрдик. Бу чәһәт һәр
бир иррационал әдәдә дә рационал әдәдләр васитәсилә кафи
гәдәр яхынлаша билмәк имканыны ашкара чыхардыр. Она кө-
рә дә юхарыда иррационал әдәдләрин рационал әдәдләрә
„яхын“ олмасы әсасында иррационал әдәдләри әдәд адландыр-
дыг. Иррационал әдәдләр үзәриндә әдилән ашағыда көстәрил-
миш әсас әмәлләрин хассәләри бу яхынлығы бир даһа тәсдиг
әдир. Белә суал мейдана чыха биләр: рационал әдәдләр тех-
никада гаршыя чыхан тәләбләри өдәйә билirmi?

Техникада гаршыя чыхан мәсәләләрин һәллиндә иррацио-
нал әдәдләри адәтән бу вә я дикәр дәгиглик дәрәчәсинә кө-
рә рационал әдәдләрә әвәз әдир вә һесаблама ишләрини бәша
чатдырырлар. Мәсәлән: чеврәнин узунлуғуну, даирәнин саһәси-
ни, цилиндрин һәчмини вә я сәтһинин саһәсини һесабладыгда

$\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... дәгигликлә π әдәдинин 3,14; 3,142; 3,14159;

3,141592; ... вә и. а. гиймәтләрини көтүрүр вә рационал әдәд-
ләр даирәсиндә һесабламалар әдирләр. Айдындыр ки, онлуғ
ишарәләринин сайыны нә гәдәр чох көтүрсәк, π әдәдинин һә-
гиги гиймәтинә бир о гәдәр дә яхын гиймәт көтүрмүш ола-
рыг.

Лакин дәгиг элми тәдгигатларда, риязи ганунларын дүзкүн
ифадә әдилмәсиндә, техниканын вә һәятыи күнү-күндән артан
тәләбләри гаршысында иррационал әдәдләр һесабынын бөйүк
вә һәлләдичи әһәмийәти вардыр. Иррационал әдәдләр һеса-
бынын әсас әмәлләри топлама, чыхма, вурма, бөлмәдир. Ла-
кин биз бу бәһсдә һәгиги әдәдин чидди риязи тә'рифини бил-
мәдийимиздән онун үзәриндә әдиләчәк әмәлләр һаггында ял-

ныз мүййән тәсәввүрләр ярада билән тә'рифләрә мұрачиәт әдә биләрик.

Әввәлчә ики сонсуз дәври онлуг кәсрлә ифадә әдилән рационал әдәдләрин чәминдән вә һасилиндән бәһс әдәк. Айдындыр ки, бу әдәдләри

$$\frac{p}{q} = p_0, p_1 p_2 \dots p_n \dots; \quad \frac{r}{s} = q_0, q_1 q_2 \dots q_n \dots$$

шәклиндә язмаг олар. һәмин әдәдләрин әскиий вә артығы илә кәтүрүлән тәгриби гиймәтләрини уйғун олараг $a_n, a_n^1; b_n, b_n^1$ илә ишарә әтсәк

$$a_n < \frac{p}{q} < a_n^1, \quad b_n < \frac{r}{s} < b_n^1$$

аларыг. Айдындыр ки, белә олдуғда

$$a_n + b_n < \frac{p}{q} + \frac{r}{s} < a_n^1 + b_n^1$$

яза биләрик, йә'ни рационал әдәдләрин чәми онларын әксийи вә артығы илә кәтүрүлмүш ихтияри уйғун тәгриби онлуг һиссәләринин чәми арасындадыр. Гейд әтмәк лазымдыр ки,

ялныз $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ чәми һәмин хассәйә малик олан еканә рационал әдәддир. Инди тутаг ки, ихтияри ики

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \beta = \beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

һәгиги әдәдләри верилмишдир. Юхарыда олдуғу кими бу һәгиги әдәдләрин әксийи вә артығы илә кәтүрүлән тәгриби онлуг һиссәләрини топлаяг:

$$a_n + a_n^1, \quad b_n + b_n^1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

Исбат әтмәк олар ки, n -ин ихтияри 1, 2, 3, ... гиймәтләриндә бу чәмләр арасында олан

$$a_n + b_n < \gamma < a_n^1 + b_n^1$$

бәрабәрсизликләрини өдәйән еканә

$$\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n \dots$$

һәгиги әдәди вардыр. Бу әдәдә α вә β һәгиги әдәдләрин чәми дейирләр:

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Аналожи олараг ики α вә β һәгиги әдәдләринин һасили тә'йин әдилир. Бу һалда a_n, a_n^1, b_n, b_n^1 һасилләрини дүзәлдирләр вә $n=1, 2, 3, \dots$ гиймәтләриндә α, β һәгиги әдәдләрин һасили

$$a_n \cdot a_n^1 < \delta < b_n \cdot b_n^1$$

мүнасибәтини өдәйән еканә $\delta = \delta_0, \delta_1, \delta_2 \dots \delta_n \dots$ әдәдинә дейилир. Тутаг ки, α вә β ихтияри һәгиги әдәдләрдир вә $\alpha < \beta$

дир. $\alpha < x < \beta$ бəрəбəрсизлийини тə'мин эдэн һəгиги эдэдлэр чохлуғуна *интервал* дейилір вə (α, β) илə ишарə эдилір.

$\alpha \leq x \leq \beta$ бəрəбəрсизлийини өдəйэн һəгиги эдэдлэр чохлуғуна исə *парча* вə я *сегмент* дейилір вə $[\alpha, \beta]$ илə ишарə эдилір. Парча илə интервал бир-бириндэн бунлары тə'йин эдэн α, β эдэдлəринин чохлуға дахил олуб, олмамасы илə фəрглəнир. Мəсələn, $0 < x < 1$ интервалыны $0 \leq x \leq 1$ парчасы (сегменти) илə мугайисə этсəк эдəd оху үзəриндə 0 вə 1-и дахил олмадығы 0 илə 1 арасындакы эдэдлэр чохлуғу интервал олур. 0 вə 1 бу чохлуға дахил олдуғда исə парча алыныр. Юхарыда, расионал эдэдлэр бəһсиндə дə биз интервал вə парчаны ялныз расионал эдэдлэр чохлуғу даирəсиндə тə'риф этмишдик, бурада исə һəгиги эдэдлэр чохлуғу даирəсиндə тə'йин этдик. Инди һəгиги эдэдлəрин чох мугум бир хассəсини исбат эдəк. Исбат эдəк ки, һər бир (α, β) интервалында һеч олмзса бир дənə һəгиги эдəd вардыр.

Тутаг ки,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

$$\beta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$$

ики һəгиги эдэддир вə $\alpha < \beta$ -дир. Бу ики һəгиги эдəдин сонсуз онлуг кəсрлə ифадəсинин һər бириндə дəврдə 9 олмадығыны фəрз эдə билирик.

Тутаг ки, α вə β эдэдлəринин бəрəбəр олмаян биринчи онлуг ишарəсинин нəмрəsi n -дир. Онда айдындыр ки, $\alpha_n < \beta_n$ олачагдыр, Тутаг ки, $\alpha_{n+m} \neq 9$ шəртини тə'мин эдэн натурал эдэдлəрдən эн кичийи m -дир. Белə бир m эдəди һəмишə вардыр, чунки доггуз эдəди α вə β онлуг кəсрлəринин дəврү дейилдир. Инди

$$\gamma = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{n+m-1}$$

сонлу онлуг кəсрини нəзəрдən кечирəк. Шəртə кəрə бу онлуг кəсрин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ онлуг ишарəлəри β онлуг кəсринин онлуг ишарəлəри бəрəбəр олур (чунки, биринчи бəрəбəр олмаян онлуг ишарəнин нəмрəsi n -дир). α_n исə энə дə шəртə кəрə β_n -дən кичикдир. Она кəрə дə $\gamma < \beta$ олур. Дикəр тəрəфдən $\alpha < \gamma$ -дир, чунки α_{n+m-1} -ə кими α илə γ -нын бəтүн онлуг ишарəлəри бəрəбəр вə $\alpha_{n+m} < 9$ -дур. Демəли, $\alpha < \gamma < \beta$ олур, йə'ни һəгиги эдэдлэр һər ердə сыхдыр. Биз һər ики һəгиги эдəдин арасында бир һəгиги эдəдин (расионал эдəдини) олдуғуну исбат этдик. Бу исбатдан иррасионал эдэдлэр чохлуғунун эдəd оху үзəриндə сых олдуғу чыхмыр. Лакин тəкчə иррасионал эдэдлэр чохлуғунун эдəd оху үзəриндə һər ердə сых олдуғуну билаваситə исбат этмəк олар. Тутаг ки, r ихтияри расионал эдэддир. Белə олдуғда $r \cdot \sqrt{2}$ шəклиндə олан бəтүн эдэдлэр иррасионалдыр (лакин бəтүн иррасионал эдэдлэр $r \cdot \sqrt{2}$ шəклиндə дейилдир).

Рационал эдэдлэр чохлуғу, эдэд оху үзәриндә һәр ердә
сых олдуғундан $r \cdot \sqrt{2}$ шәклиндә олан эдэдләр дә эдэд оху
үзәриндә һәр ердә сыхдыр. Онда бүтүн иррационал эдэдләр
чохлауғу да эдэд оху үзәриндә һәр ердә сыхдыр.

АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР ВЭ ЛИМИТЛЭР

§ 1. КЭМИЙЙЭТЛЭР ҲАГГЫНДА

Инсан өзүнүн күндәлик фәалийәтиндә вә мүшәһидәләриндә заман, температур, узунлуг, һәчм, чәки, сүр'әт вә и. а. кими чохлау кәмиийәтләрә раст кәлир вә онлардан истифадә эдир.

Кәмиийәтләрин өлчүлә билмәк вә я әдәдләрлә ифадә олуна билмәк хассәсинин мүстәсна әһәмийәти вардыр.

Риязийятын башлыча вәзифәси кәмиийәтләри мигдарча өйрәнмәкдир.

Кәмиийәтләр тәбиәтләринә көрә ики гисмә айрылыр: 1) сабит кәмиийәтләр; 2) дәйишән кәмиийәтләр.

Дәйишмә просесиндә мүхтәлиф гиймәтләр алан кәмиийәтә *дәйишән кәмиийәт*, әйни гиймәт алан кәмиийәтә исә *сабит кәмиийәт* дейилир. Һаванын температуру, тәзйиги, һәрәкәт әдән чисмин кетдийи йол, дүзбучаглынын өлчүләриндән асылы олараг тә'йин әдилән саһәси дәйишән кәмиийәтләрдир. Үчбучагларын дахили бучагларынын чәми, чеврәләрин узунлуғунун диаметрләринә нисбәти, әйни бир мәһәлдә чисмин чәкиси вә и. а. сабит кәмиийәтләрдир.

Дәйишән кәмиийәтин верилмәси онун гиймәтләри чохлауғунун верилмәси демәкдир. Сабит кәмиийәтә дә әйни гиймәт алан дәйишән кәмиийәт кими саһмаг даһа мүнәсибдир. Дәйишән кәмиийәтин лимитини тә'йин әтмәк үчүн онун тәкчә гиймәтләри чохлауғуну билмәк кифайәт дейил, әйни заманда бу кәмиийәтин дәйишмә пр сесини дә билмәк лазымдыр.

Кәмиийәтләрин тәдгигинә көрә риязийятын үмуми ивқишаф тарихини ики бөйүк дөврә айырмаг олар:

Биринчи, йә'ни сабит кәмиийәтләрин тәдгиги дөврү, бу кәмиийәтләрә аид олан риязи ганунларын кәшфи вә үмумиләшмәси дөврүдүр. Икинчи йә'ни дәйишән кәмиийәтләрин тәдгиги дөврү исә онлара аид олан риязи ганунларын кәшфи вә үмумиләшдирилмәси дөврүдүр.

Бу дөвләри бир-бириндән гәт'и мүййән әдилмиш сәрһәд-лә вә кәскин чизкиләрлә айырмаг мүмкүн олмаса да, гисмән айырмаг мүмкүндүр.

Риязийятын инкишаф тарихинин биринчи дөврү бәшәр дүһасынын узун бир инкишаф тарихи дөврү олуб, гәдим заманлардан башлаяраг XVII әсрин орталарына гәдәр олан вахты әһәтә әдир. Бу дөвр әрзиндә халгларын биркә сә'й вә ярадычылығы нәтичәсиндә риязийятын мөһтәшәм билик хәзинәси ярадылмышдыр. Һәндәсә, чәбр вә тригонометрия кими чидди мәнтиги әсаса, кениш тәдгигат саһәсинә малик олан риязи фәнләр һәмин хәзинәнин гиймәтли инчиләриндән ибарәтдир.

Мүййән мә'нада тамамланмыш бу риязи фәнләрә ән'әнәви вә я шәрти олараг бирликдә *элементар (орта) риязийят* дейилир.

Риязийятын инкишаф тарихинин биринчи дөврүндә күлли мигдарда риязи ганунлар кәшф олунмуш вә бу ганунлар инсан әптиячына табе әдилмишдир. Һәмин дөврдә гәт'и мүййән әдилмиш фактларла янашы һәлл әдилмәси лазым олан мүһүм мәсәләләр дә мейдана чыхмышдыр. Бунлардан дәйишән сүр'әтли һәрәкәтин һәр андакы сүр'әтинин тә'йини, әйри хәтләрлә вә сәтһләрлә әһәтә олунмуш фигур вә чисимләрин сәтһинин саһәсини, онларын һәчмләрини тапмаг кими әһәмийәтли мәсәләләри кәстәрмәк олар.

Риязийятын ени гә даһа күчлү методлары олмадан сонунчу мәсәләләри һәлл этмәк мүмкүн дейилдир. Ени методларын кәшфиндән әввәл бир нечә һәндәси фигурларын сәтһләрини вә я һәчмләрини һесабламаг мүмкүн иди. Мисал үчүн үчбучаг, квадрат, дүзбучаглы вә и. а. фигурларын саһәсини, кубун, призманын, паралелепипедин һәчмини тә'йин этмәк олурду.

Бу дөврүн өзүндә дә даһа мүррәккәб фигурларын саһәләрини вә һәчмләрини һесабламаг үчүн кәләчәкдә ишләдиләчәк үмуми методларын элементләри кәшф әдилмишдир. Мәсәлән, чеврәнин узунлуғу, даирәнин саһәсини һесабламаг үчүн ишләдилән үсүл чидди риязи әсасландырылмаса да интуисия¹ йолу илә һесабланырды. Даһа мүрәккәб фигурларын саһәләрини һесабламаг мәсәләси исә бу дөврдә ачыг галмышдыр. Бедөврдә сонсуз кичиләнләр вә я лимитләр методу мүвәффәгийәтлә ишләдилмишдир.

Икинчи дөвр, риязийятын XVII әсрдән сонракы инкишаф дөврү, онун ени дөврүдүр. Бу дөврдә риязийятын әски симасы дәйишәрәк тәбиәт һадисәләри даһа дәриндән, һәрәкәтдә, гаршылығлы әләгә шәраитиндә өйрәнилир.

¹ Интуисия—бу вә я дикәр факты һисс этмәк вә дуймаг мә'насында ишләдилир.

Белә һадисәләрин өйрәнилиши, бу вә я дикәр дәйишән кәмийәтләрин өйрәнилмәсинә кәтирилир. Беләликлә, дәйишән кәмийәтләрин өйрәнилмәсинә кечмәк риязийятда ени эра ачыр вә элементар риязийятдан фәргләнәрәк һамысы бирликлә „али риязийят“ адланан үмуми риязи фәнләрин әсасы олан „риязи анализ“ фәнни ярадылыр. Риязи анализ фәнни методунун күчү вә енилийи, кәмийәтләрин мигдарча тәһлилини онларын физики маһийәти илә бағлы олмадан, үмуми шәкилдә өйрәнә билмәсиндәдир. Бурада кәмийәтин физики маһийәтиндән асылы олмаяраг үмуми шәкилдә мигдарча тәһлили, конкретликлән мүчәррәдлийә доғру бир аддымдыр. Һадисәләрин конкретликлән мәһрум үмумилийини өйрәнмәк риязийятын үстүн чәһәтидир. Адәтән риязийятда кәмийәтин физики маһийәтини нәзәрә алмаяраг, ону бир x һәрфи илә ишарә эдир вә үмуми шәкилдә онун табе олдуғу риязи ганунлары кәшф этмәйә чалышырлар. Хүсуси һалда бу кәмийәт истәр заман, истәр мәсафә вә истәрсә дә температур кими конкрет кәмийәтләр олдугда енә һәммин ганунлар өз күчүндә галыр. Бу ганунлары тәтбиг этдикдә конкрет кәмийәтин уйғун ваһидләри ишләдилир. Мисал үчүн үчбучағын дахили бучагларынын чәминин ики дүз бучаға бәрабәр олмасы кими үмуми бир факты көстәрмәк олар. Бүтүн үчбучаглара аид олан бу факт, о чүмләнән конкрет верилән үчбучаға да аиддир. Демәли, конкретликлән мәһрум үмумилик риязийятын фөвгәл адә мүчәррәдлийи вә я гейри-һәятилийи дейил, онун әлверишлилийи, йығчамлығы вә мөһтәшәмлийидир. Бу мәгсәдлә дә риязийятчылар һадисәләри даһа дүзкүн тәсвир вә изаһ эдә билән анлайышлара, метод ара вә үмумиләшдирмәләрә мурәaciәт эдир, бу һадисәләрин табе олдуғу ганунлары кәшф эдир вә онларын риязи дейилишини мүәййәнләшдириләр. Һадисәләри тәдгиг этмәк үчүн һәр шейдән габаг бу һадисәләрин кедишиндә, төрәмәси вә инкишафында мүһүм рол ойнаян кәмийәтләри мүәййән этмәк вә бу кәмийәтләрин дәйишмә ганунуну өйрәнмәк лазымдыр.

Риязийята дәйшән кәмийәт анлайышыны дахил этмәк зәрурәти бүтүн әзәмәти илә ени дөврүн тәләбләри сырасында дурур. Бу тәләбләр айры-айры риязийятчыларын шәхси тәләбләри, арзулары вә үмумиләшдирмәләри дейил, ени техниканын артан тәләбләри, онун инкишафынын тәләбләридир.

Беләликлә, риязийятын инкишафынын биринчи дөврү риязийята дәйишән кәмийәт анлайышынын дахил эдилмәсилә битир; Декартын, Нютонун вә Лейбнисин тәдгигатлагы илә зәнкинләшән ени риязийятын—риязи анализ методларынын эрасы башланыр. Бу тарихи һәгигәти Ф. Эңкелс ашағыдакы образлы сөzlәрлә белә демишдир: „Риязийята дәйишән кәмийәт анлайышынын дахил эдилмәси онун дөнүм нөгтәси олду. Бунун нәтичәсиндә риязийята һәрәкәт вә диалектика дахил

эдилди, буна жөрә дэ дәрһал дифференциал вә интеграл һесабы зәрурәти мейдана чыхды¹.

Сонсуз кичиләнләр вә я лимитләр методу риязи анализин әсас методу олуб ени һесабын кәскин силаһыдыр.

§ 2. ӘДӘДЛӘР АРДЫЧЫЛЛЫҖЫ ҺАГҖЫНДА

Дәйишмә просесиндә бә'зи кәмийәтләрин алдығы гиймәтләри ардычыл нөмрәләмәк мүмкүн түр, бә'зиләрини исә нөмрәләмәк мүмкүн дейилдир. Һәтта ади данышыг ифадәләриндә дә, чох вахт „әввәл кәлән“, „сонра кәлән“, „биринчи“, „икинчи“ кими сөzlәр ишләдирик. Мәсәлән, бир күчәдә тикилән әвләрин өзүнә мәхсус нөмрәси вардыр; бөйүк нөмрәси олан әв, кичик нөмрәси олан әвдән сонра кәлир вә я кичик нөмрәси олан әв, бөйүк нөмрәси олан әвдән әввәл кәлир; яхуд китаб охуянда үчүнчү сәһифәдә язылан сөzlәр йүзүнчү сәһифәдә язылан сөzlәрдән әввәл кәлир. Беләликлә, бир сыра кәмийәтләрин гиймәтләрини мүййән низама салмаг олур. Бир нечә белә мисал кәтирсәк көрәрик ки, бунларын һамысынын табе олдуғу ашағыдакы ики аксиом мөвчуддур:

1) a , b , c кими үч әдәд, (яхуд үч элемент) верилмиш вә a -нын b -дән әввәл, b -нин c -дән әввәл кәлдийи мә'лумдурса, онда a -да c -дән әввәл кәләр.

2) әкәр a әдәди (вә я элементи) b -дән әввәл кәләрсә, онда b әдәди a -дан сонра кәләр.

Бунлара „низам аксиомлары“ дейилир. Мәсәлән, дәйишән x кәмийәтинин гиймәтләри ялныз натурал

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (1)$$

әдәдләриндән ибарәтдирсә, бу гиймәтләр чохлуғу низам аксиомларынын шәртини, йә'ни онун һәр үч һәди биринчи аксиомун, һәр ики һәдди исә икинчи аксиомун тәләбләрини тә'мин эдир. Бунлардан әлавә (1) ардычыллығын биринчи элементи (бу элемент 1-дир) вә һәр элементдән сонра билаваситә бир әл менти вардыр.

Гейд этмәк лазымдыр ки, низам аксиомларынын дейилишиндә „әввәл кәлән“ вә я „сонра кәлән“ әдәдләр дедикдә, үмумийәтлә, онларын гиймәтләринин бөйүк вә я кичиклийи ичәрдә тутулмур. Гиймәгләри низам аксиомларынын шәртләрини өдәйән кәмийәтләрә низамлана бәлән кәмийәтләр дейилир. Биз кәмийәтләрин, үмумийәтлә низамланмасындан данышмаячағыг.

Низамлаға билән дәйишән кәмийәтләр ичәрисиндә гиймәтләри натурал әдәдләр васитәсилә ардычыл нөмрәләнә билән кәмийәтләрин хүсуси әһәмийәти вардыр. Белә дәйишән x

¹ Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат 1948 г. сәһ. 208.

кәмийәтини x_n илә ишарә әдәчәйик. Бурада $n = 1, 2, \dots$ гиймәтләр алдыгда x_n дәйишән кәмийәти ардычыл

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (2)$$

кими гиймәтләр алыр. x_n кәмийәтинин бу ардычыл гиймәтләринин өзүнә мэхсус ганунлары вардыр. Һәр шейдән әввәл (2) ардычыллыгыны гуаркән (1) натурал әдәдләр сырасындан истифадә этдик. Белә ки, (1) натурал әдәдләр сырасындан көтүрүлмүш n_1 натурал әдәдинә гаршы дәйишән x_n кәмийәтинин мүйәйән ганунла һәгиги x_n гиймәти гоюлур вә бу гиймәтләр ардычыл дүзүлүр; $n_2 > n_1$ олдугда, ардычыллыгын x_{n_2} һәдди x_{n_1} -дән сонра кәлир.

Гейд әтмәк лазымдыр ки, Һәр бир дәйишән кәмийәтин алдыгы гиймәтләри көстәрдийимиз гайда илә бир-биринин ардынча нөмрәләмәк мүмкүн дейилдир. Бә'зән натурал әдәдләр ардычыллыгы кәмийәтләрин алдыгы гиймәтләри нөмрәләмәк үчүн кифайәт әтмир. Мисал үчүн x кәмийәти әдәд охунун 0 илә 1 әдәдләри арасындакы бүтүн расионал вә иррасионал гиймәтләри алса, онда алынан бу гиймәтләри бир-биринин ардынча нөмрәләмәк мүмкүн олмадыгы мә'лумдур.

Дәйишән кәмийәтин алдыгы гиймәтләрдән юхарыдакы гайда илә әдәдләр ардычыллыгы гурдуг. Инди әдәдләр ардычыллыгынын дәгиг риязи тә'рифини верәк.

Тә'риф. Ашагыда көстәрилән хассәләрә малик олуб, ардычыллыгын һәдләри адланан әдәдләр чохлуғуна *әдәдләр ардычыллыгы* дейилир:

1) ардычыллыгын һәдләринин һамысындан әввәл кәлән вә онун биринчи һәдди адланан, бир һәдди вардыр;

2) ардычыллыгын һәдләринин Һәр бириндән сонра билаваситә онун бир вә ялныз бир һәдди вардыр;

3) әксинә, биринчи һәдд мүстәсна олмагла ардычыллыгын Һәр һәддиндән әввәл билаваситә онун бир вә ялныз бир һәдди вардыр; белә ки, Һәр һәддән әввәл ардычыллыгын сонлу сайда һәдди вардыр.

Инди ардычыллыға вердийимиз тә'рифин тәләбләрини тәһлил әдәк. Ардычыллыгын тә'рифини нәзәрә алыб, онун һәдләрини сырая дүзсәк көрәрик: 1. Ардычыллыгынын биринчи һәдди вардыр. 2. Ардычыллыгын биринчи һәддән башга ихтияри һәддини тапмаг олар. Белә ки, биринчи һәддән сонра билаваситә кәлән һәдди, йә'ни икинчи һәдди; икинчи һәддән сонра билаваситә кәлән һәдди, йә'ни үчүнчү һәдди вә и. а. тапмаг вә һәдләрин бу гайда илә тапылмасыны сонсуз сурәгдә давам әтдирмәк олар. Беләликлә, ардычыллыгын сонсуз сайда һәдди олдуғу гәнаәти һасил әдилир. 3. Ардычыллыгын Һәр һәддиндән габаг нечә һәдд олдуғуну көстәрән нөмрә вардыр.

Бу хассәләри башга сөзлә ифадә әтсәк демәлийик ки, ардычыллыгын n -чи һәддини тапмаг үчүн биринчи һәддән башлая-

раг ардычыллыгын $n-1$ һәддини ардычыл сурәтдә тапмаг лазымдыр.

Ардычыллыглар мұхтәлиф олур. Бунлардан бә'зиләри n -чи һәдди (юхарыдакы (2) ардычыллыгында буну x_n илә ишарә этмишдик) верилмәсилә гурула билир, белә һәддә ардычыллыгын үмуми һәдди дейилир. Бә'зиләринин исә бүтүн һәдләри верилир. Бир нечә мисал көстәрәк:

$$1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, n(n+1), \dots$$

бу ардычыллыгда $x_n = n(n+1)$ ифадәси үмуми һәддир. Доғрудан да, $n=1$ оlanda $x_1 = 1(1+1) = 1 \cdot 2$; $n=2$ оlanda $x_2 = 2(2+1) = 2 \cdot 3$; $n=3$ оlanda $x_3 = 3(3+1) = 3 \cdot 4$ вә и. а. Бу гайда илә ардычыллыгын бүтүн һәдләрини әлдә әдәрик.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

ардычыллыгында исә үмуми һәдд $x_n = \frac{1}{n^2}$ -дир. Доғрудан да,

$n=1$ оlanda биринчи һәдд $x_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ олар. $n=2$ оlanda

иккинчи һәдд $x_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ олар. $n=3$ оlanda үчүнчү һәдд

$x_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ олар вә и. а.

Чүт әдәдләр. 2, 4, 6, ... ардычыллыгыны нәзәрдән кечирмиш олсаг, бурада үмуми һәддин $x_n = 2n$ олдуғуну сөйләйә биләрик.

Тәк әдәдләр. 1, 3, 5, ... ардычыллыгын үмуми һәдди $x_n = 2n-1$ олар.

Лакин үмуми һәддин верилмәсилә ардычыллыгы гурмаг вә ардычыллыгын верилмәсилә онун үмуми һәддини тапмаг бир чох ардычыллыглара хас дейилдир. Мисал үчүн әсли әдәдләр ардычыллыгыны¹ нәзәрдән кечирәк. Юхарыдакы ардычыллыглардан фәргли олараг:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

ардычыллыгы үчүн n нөмрәли һәддин үзәриндә әдиләчәк әлә сонлу сайда чәбри әмәлләри көстәрмәк мүмкүн дейилдир ки, бу әмәлләр васитәсилә ардычыллыгын үмуми һәддини (x_n -и) тәйин этмәк мүмкүн олсун. Бу һеч дә о демәк дейилдир ки, биз белә һалларда ардычыллыг сөзүнү ишләтмәлийик.

Инди бә'зи хусуси вә һәм дә мүстәгил әһәмийәти олан әдәдләр ардычыллыгындан бәһс әдәк.

¹ Әсли әдәдләрин сонсуз сайда олдуру китабын I һиссәсиндә исбат әдилмишдир.

§ 3. Эдэди силсилэ

Тутаг ки,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

эдэдлэр ардычыллыгы верилмишдир, белэ ки, бу ардычыллыгын биринчи хэддиндэн сонра кэлэн хэр бир хэдди, өзүндэн билаваситэ габаг кэлэн хэдлэ, бу ардычыллыг үчүн сабит олан мүййэн бир мүсбэт вэ я мэнфи эдэдин чэминэ бэрэбэрдир. Бу сабит эдэди d илэ ишарэ эдэк. Бу гайда илэ тэ'йин эдилэн эдэди ардычыллыга *эдэди силсилэ* вэ d эдэдинэ эдэди силсилэнин *фэрги* дейилир¹. Эдэди силсилэнин тэ'рифини нэзарэ алсаг:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned} \quad (2)$$

мүнасибэтини элдэ эдэрик. Айдындыр ки, $d = a_k - a_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$) олар. Эдэди силсилэнин хэдлэри биринчи хэддэн башлаяраг артдыгда бу силсилэйэ *артан эдэди силсилэ*, азалдыгда исэ *азалан эдэди силсилэ* дейилир. Мэсэлэн,

$$2; 3,5; 5; 6,5; 8; \dots$$

артан эдэди силсилэдир. Бу эдэди силсилэнин хэдлэр фэрги,

$$d = 3,5 - 2 = 5 - 3,5 = \dots = 1,5 \text{ олар.}$$

$$8, 4, 0, -4, -8, -12, \dots$$

эдэди силсилэ исэ азалан эдэди силсилэдир. Бунун хэдлэр фэрги $d = 4 - 8 = -4 - 0 = -12 - (-8) = \dots = -4$ олар.

1. Эдэди силсилэнин үмуми хэддинин формулу

(1) эдэди силсилэнин үмуми хэддинин формулуну асанлыгла элдэ этмэк олар. Бунун үчүн (2) мүнасибэтиндэ хэр эввэл кэлэн бэрэбэрлийи сонракы бэрэбэрликлэрдэ еринэ язаг:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \end{aligned}$$

бу гайда илэ давам этсэк

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (3)$$

формулуну аларыг.

Эдэди силсилэнин үмуми хэддинин (3) формулундан көрүндүйү кими a_1 , a_n , n вэ d кими дөрд элементдэн ихтияри үчү

² Силсилэлэрэ анд илк мэсэлэлэрэ Ринд папирусларында раст кэлмэк олур.

мә'лум икән, (3) формулу васитәсилә дөрдүнчүнү тапмаг олар.
Мәсәлән,

$$1; 2,5; 4; \dots$$

силсиләсиндә һәдләр фәрги $d = 1,5$ -дир. Силсиләнин он бешинчи һәддинин тапылмасы тәләб әдилир. Үмуми һәдд формулуна көрә

$$a_{15} = 1 + 1,5 (15 - 1) = 1 + 1,5 \cdot 14 = 1 + 21 = 22 \text{ олур.}$$

2. Кәнар һәдләрдән эйни узаглыгда дуран һәдләрин хассәси

Инди әдәди силсиләнин биринчи n һәддини нәзәрдән кечи-рәк (n —ихтияридир);

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n. \quad (4)$$

Бу силсиләнин бә'зи хассәләрини көстәрәк: әдәди силсиләнин биринчи n һәддинин ичәрисиндә биринчи вә сонунчу һәдләрдән эйни узаглыгда олан ики һәддин чәми, силсиләнин биринчи вә сонунчу һәдләринин чәминә бәрәбәрdir.

Бу тәклифи исбат әдәк. Әкәр (1) әдәди силсиләсинин биринчи n һәдди арасында һәдләр фәрги d исә, бу силсиләнин һәдләрини тәрсинә дүзмүш олсаг

$$\dots a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, \quad (5)$$

һәдләринин фәрги— d олан әдәди силсилә аларыг. Доғрудан да, бурада $a_{n-1} - a_n = - (a_n - a_{n-1}) = -d$ олар.

Айдындыр ки, биринчи n һәддин тәрсинә дүзүлүшүндә a_n биринчи һәдд, a_1 исә сонунчу һәддир. (4) дүзүлүшүндә k -чы ердә дуран һәдди $a_k = a_1 + (k-1)d$ формулу васитәсилә тапа биләрик. Һәмин дүзүлүшдә ахырынчы a_n һәддиндән солда k -чы ердә дуран һәдди һесабламаг үчүн (5) дүзүлүшүндән истифадә этмәк олар. Бунун үчүн a_n -ин үзәринә $(k-1)(-d)$ һәддини кәлмәк лазымдыр:

$$a_n - (k-1)d.$$

Алынан бу ики һәдди топласаг:

$$a_1 + (k-1)d + a_n - (k-1)d = a_1 + a_n$$

алынар. Бунунла, көстәрдийимиз хассә исбат әдилмиш олур. Мисал үчүн 1-дән 100-ә гәдәр чүт әдәдләр арлычыллығынын һәдләрини көтүрәк. Ахырдан 41-чи һәдлә әввәлдән 41-чи һәддин чәмини һесаблаяг. Айдындыр ки, бу һалда биринчи һәдд 2, ахырынчы һәдд 100, һәдләр фәрги исә $d = +2$ олар. Һәдләри тәрсинә дүздүкдә исә $d = -2$ олар. Әввәлдән 41-чи һәдд

$$2 + (41-1)2 = 2 + 40 \cdot 2 = 82$$

ахырдан 41-чи һәдд исә:

$$100 - (41-1)2 = 100 - 80 = 20$$

олар. Инди алынан эдэдлэри топласаг $82 + 20 = 102$ аларыг.

Биринчи һэдлэ ахырынчы һэддин чэми дә $2 + 100 = 102$ олдуғу айдын көрүнүр.

3. Эдэди силсиләнин биринчи n һэддинин чэми

(1) ардычыллыгынын биринчи n һэддинин чэмини s_n илә ишарә эдәк:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Эләчә дә,

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

олар.

Бу ики бәрабәрлийи тәрәф-тәрәфә чәмләсәк:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

аларыг. Юхарыда исбат этдийимиз хассәйә көрә

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$$

олдуғундан

$$2s_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

вә я

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (6)$$

олар. Беләликлә, ашағыдакы нәтичәни әлдә әдирик. Эдәди силсиләнин биринчи n һэддинин чэми, биринчи вә сонунчу һэдлэри чэминин ярысы илә һэдлэри сайынын һасилинә бәрабәрдир.

Силсиләнин үмуми һэддинин дүстуруну нәзәрә алсаг, онун биринчи n һэддинин чэми формулу, йә'ни (6) формулу

$$s_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

шәклинә дүшәр.

Мисаллар. 1. Биринчи n дәнә натурал эдәдин чэмини тапын.

Айдындыр ки, белә эдәди силсиләнин биринчи һэдди $a_1 = 1$, һэдләр фәрги $d = 1$, n -чи һэдди исә $a_n = n$ олар. Бу эдәди силсиләнин биринчи n һэддинин чэми исә

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

формулу илә тә'йин олунар.

2. Биринчи n дәнә тәк эдәдин чэмини тапын. Айдындыр ки, тәк эдәдләр ардычыллыгы, һэдләринин фәрги $d = 2$ олан эдәди силсилә тәшкил әдир. Бу силсиләнин биринчи һэдди

$a_1 = 1$, n -чи һәдди исә $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$ -дир. Биринчи n һәддинин чәми (6) формулуна әсәсән

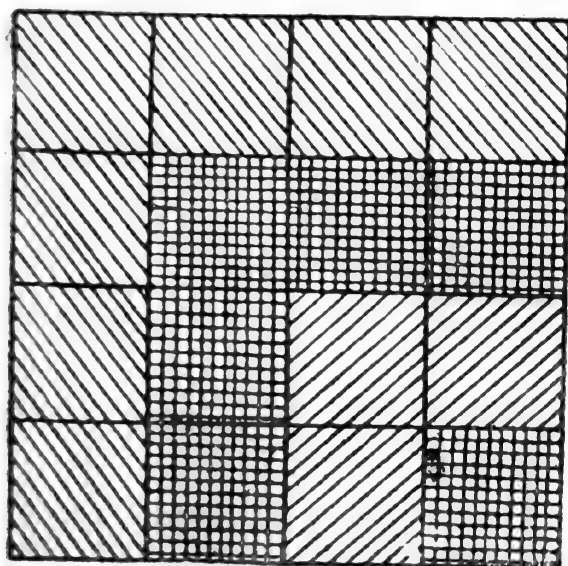
$$s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{2 + (n - 1) \cdot 2}{2} \cdot n = n^2$$

олар.

Демәли:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Натурал әдәдләр ардычыллыгында биринчи n дәнә тәк әдәдин чәмини һәндәси изаһ әдәк. Тәрәфи n олан квадратын саһәсинин n^2 олдуғуну нәзәрә алсаг, тәк әдәдләрин чәмини ашағыдакы кими изаһ әдә биләрик. Садәлик үчүн $n = 4$ олсун. Белә квадратда тәрәфи 1-ә бәрабәр олан 16 квадрат ерләшир. Дикәр тәрәфдән $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ олдуғу биринчи 4 тәк әдәдин чәминин формулундан айдын көрүнүр. Әкәр тәрәфи 4 ваһид олан квадратын тәрәфләрини 4 бәрабәр ерә бөлсәк вә бөлкү нөгтәләрини гаршы тәрәфләрдәки уйғун нөгтәләрлә бирләшдирсәк, тәрәфи ваһид олан 16 квадрат әлдә әдәрик (9-чу шәкил). $1 + 3 + 5 + 7$ чәми шәкилдә көстәрдийимиз



9-чу шәкил

башлаяраг гараланан саһәләрин чәмини көстәрир. Чәмин биринчи һәдди ашағы сағ учдакы квадратын саһәсини, икинчи һәдди ону дахилинә алан гараланан үч квадратын саһәсини, үчүнчү һәдди ахырынчы дөрд квадраты дахилинә алан беш квадратын саһәсини, дөрдүнчү һәдди исә гараланан 9 квадраты дахилинә алан 7 квадратын саһәсини көстәрир.

4. Әдәди орта

Инди бир нечә әдәдин әдәди орта гиймәтини тә'йин әдәк вә онун бә'зи хассәләрини көстәрәк.

Тә'риф. a_1, a_2, \dots, a_n әдәдләринин әдәди орта гиймәти бу әдәдләрин чәбри чәминин һәмин әдәдләрин сайына бөлүнмәсиндән алынган әдәдә дейилир, йә'ни,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

верилмиш әдәдләрин әдәди орта гиймәтидир.

1-чи хассэ. a, b эдэдлэринин $\frac{a+b}{2}$ эдэди орта гиймэти вэситэсилэ дүзэлэн $a, \frac{a+b}{2}, b$ хэдлэри эдэди силсилэнин хэдлэридир.

Доғрудан да,

$$\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Демэли, бу эдэди силсилэнин хэдлэр фэрги $d = \frac{b-a}{2}$ -дир.

2-чи хассэ. Экэр a_1, a_2, \dots, a_n мүййэн эдэди силсилэнин биринчи n хэддидирсэ, онда бунун ардычыл көтүрүлмүш хэр үч хэддинлэн икинчи хэдди биринчи илэ үчүнчүнүн эдэди орта гиймэтиндэн ибарэтдир.

Тутаг ки, верилмиш эдэди силсилэнин хэдлэри фэрги d -дир. Онда

$$d = a_m - a_{m-1},$$

$$d = a_{m+1} - a_m$$

олур. Бурадан:

$$a_m = a_{m-1} + d,$$

$$a_m = a_{m+1} - d$$

олдуғу ашкардыр. Ахырынчы бэрабэрликлэри тэрэф-тэрэфэ топласаг

$$2a_m = a_{m-1} + a_{m+1}$$

вэ я

$$a_m = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$$

олар. Бу исэ эдэди силсилэнин a_m ($m = 2, 3, \dots, n$) хэддинин кэнэр a_{m-1}, a_{m+1} хэдлэрин эдэди орта гиймэти олдуғуну көстэрир.

3-чү хассэ. Верилмиш ики a, b эдэдлэри арасына бу эдэдлэрлэ эдэди силсилэ тэшкил эдэн n дэнэ эдэд дахил этмэк олар. Бу тэклифин исбатыны бир мисал үзэриндэ нүмайиш этдирэк.

Мисал. 2 вэ 14 эдэдлэри арасына бунларла эдэди силсилэ тэшкил эдэн беш эдэд дахил эдин.

Бу эдэдлэри x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 илэ ишарэ эдэк. Шэртэ көрэ хэмин эдэдлэр элэ олмалыдыр ки,

$$2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 14$$

мүөййән бир әдәди силсиләнин һәдләри олсун. Бу әдәди силсиләнин һәдләр фәргини d илә ишарә этсәк:

$$x_1 = 2 + d, \quad x_2 = 2 + 2d, \quad x_3 = 2 + 3d, \quad x_4 = 2 + 4d, \\ x_5 = 2 + 5d, \quad 14 = 2 + 6d$$

аларыг. Ахырынчы бәрабәрликдән һәдләр фәргини һесаблия биләрик:

$$d = \frac{14 - 2}{6} = 2.$$

Онда,

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2 + 4 = 6, \quad x_3 = 2 + 6 = 8, \\ x_4 = 2 + 8 = 10, \quad x_5 = 2 + 10 = 12$$

олар.

Беләликлә, 2 вә 14 әдәдләри арасына бу әдәдләрлә әдәди силсилә тәшкил әдән беш әдәд дахил этдик:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.$$

Мисаллар. 1. Бүтүн икирәгәмли әдәдләрин чәмини тапын.

Айдындыр ки, биринчи икирәгәмли әдәд 10-дур, йә'ни $a_1 = 10$, икирәгәмли әдәдләр һәдләринин фәрги $d = 1$ олан әдәди силсиләнин һәдләридир.

Бүтүн икирәгәмли әдәдләрин сайы 90, ахырынчы икирәгәмли әдәд исә 99-дур, онда

$$s_{90} = \frac{10 + 99}{2} \cdot 90 = 4905.$$

2. Зәнкли саат 24 саатда нечә дәфә зәнк вурар (бу мәсәләнин һәлли охучулара тапшырылыр). Чаваб 180.

3. Бир әдәди силсиләнин биринчи һәдди 1-дир. Биринчи m һәддинин чәминин биринчи n һәдди чәминә нисбәти исә $m^3:n^2$ кимидир. Силсиләни гурун. Чаваб $d = 2$.

4. Фәрги d олан бир әдәди силсиләнин һәдләри a_1, a_2, \dots, a_n -дир.

$$s = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

чәмини тапын.

К ө с т ә р и ш. Әввәлчә $(a_1 + d)^3, \dots, (a_n + d)^3$ һәдләрини ачын, сонра шәртдән истифадә әдин. Чаваб

$$na_1a_n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} \cdot n^2.$$

5. **Тарихи мәсәлә.** Гәдим Мисир мәсәләләринин бириндә белә дейилир; 5 адамын арасында 100 емәк әлә бөлүнмәлидир ки, онларын һәр биринин алдыгы емәкләрин сайы әдәди силсиләнин һәдләри олсун. Бундан әлавә биринчи үч адам тәрәфиндән алыннан емәкләрин сайынын $\frac{1}{7}$ һиссәси, сонунчу ики адам тәрәфиндән алыннан емәкләрин сайына бәрабәр олсун. Һәр бир адамын нечә емәк алдыгы сорушулур.

Кечмишдә һәм ин мәсәләнин мұәллифи мәсәләни белә һәлл этмишдир. Фәрз әдәк ки, ахырынчы адам бир емәк, ондан габагкы адам исә $6\frac{1}{2}$ емәк (сәбәби көстәрилмәдән) алмыш-

дыр. Сонра әдәди силсилә дүзәлдәрәк мұәллиф давам этмишдир. Бу гайда илә дүзәлдилмиш әдәди силсиләнин һәдләри чәми вә я адамларын алдығы емәкләрин сайы 60 олур (кәрәк 100 емәк ола иди!). Мәсәләнин һәллинин мұәллифи гейд әдир ки, дүзкүн чаваб алмаг истәйәнләр алынан һәр емәйин сайыны 100-үн 60-а нисбәти дәфә артырмалыдыр.

Верилән мәсәләни һәлл этмәли вә мұәллифин һәлли илә мұгайисә этмәли. Чаваб $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{3}$.

§ 4. Һәндәси силсилә

Инди башга бир хусуси ардычыллыгдан бәһс әдәк. Юхарыда биринчи һәддән башлаяраг һәр сонракы һәдд өзүндән билаваситә габаг кәлән һәдлә бүтүн һәдләр үчүн сабит олан бир әдәдин чәминә бәрабәр олан хусуси ардычыллыгдан бәһс этдик вә бу ардычыллыгы әдәди силсилә адландырдыг.

Инди фәрз әдәк ки,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

ардычыллыгында биринчи һәддән башлаяраг ардычыллыгын һәр сонракы һәдди әввәлки һәдлә бүтүн ардычыллыг үчүн сабит олан бир мүсбәт вә я мәнфи әдәдин һасилинә бәрабәрдир. Белә ардычыллыға *һәндәси силсилә*, ардычыллыгын сабит вуруғуна исә һәндәси силсиләнин *ортаг вуруғу* дейилир. Бу тәрифиди нәзәрә алсаг (1) ардычыллыгынын һәдләринин ашағыдакы хассәләрә малик олдуғуну көрәрик.

1. Һәндәси силсиләнин үмуми һәддинин формулу

Тутаг ки, q һәндәси силсиләнин ортаг вуруғудур. Онда

$$a_2 = a_1 q, a_3 = a_2 q, \dots, a_n = a_{n-1} q, \dots \quad (2)$$

мүнасибәтләрини алырыг. (2) ардычыллыгында һәр әввәлки һәдди сонракы һәддә еринә язсаг

$$a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_1 \cdot q^2, \dots, a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \dots \quad (3)$$

$$\text{аларыг; бурада} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (4)$$

һәддинә (2) ардычыллыгынын үмуми һәдди дейилир. n нөмрәсинә 1, 2, вә и. а. натурал гиймәтләр версәк (4) формулу васитәсилә (3) ардычыллыгынын бүтүн һәдләрини әлдә әдәрик. Һәндәси силсиләйә аид бир нечә мисал вә мәсәләләр көстәрәк.

1. Тарихи мәсələ. Рəвайəтə кəрə һинд шаһзадəси Сирам шаһматы ичад эдэн шəхси өз янына дə'вəт эдэрək онун ихтира этдийи оюна кəрə һәр нə арзу эдəрсə, бу арзу илə мұкафат-ланачағыны дедикдə шаһматы ичад эдэн шəхс бугда илə мұкафатландырылмасыны истəмишдир. Белə ки, шаһмат тах-тасынын биринчи ханəси үчүн бир бугда дənəси, икинчи ха-нəси үчүн ики, үчүнчүсү үчүн дөрд вə с. һәр кəлэн ханəйə əввəlкиндəи ики дəфə артыг бугда дənəси верилмəсини ха-һиш этмишдир. Шаһзадə бу мұкафатын верилмəсинə разы олмуш вə сорушмушдур ки, буна нə гəдэр бугда верилмəлидир?

Шəртə кəрə һәр ханəдəки бугда дənəлəринин сайы өзүн-дэн əввəl кəлэн ханəдəкиндən ики дəфə чохдур. Шаһмат тах-тасынын 64 ханəси олдуғундан һесаб эдəчəйимиз һəдлəрин сайы 64 олачагдыр:

Тəлəб əдилэн бугданын мигдарыны тə'йин этмək үчүн кес-тəрилэн 64 һəдди топламалыйыг:

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{63}$$

һəмин чəми белə дə яза билəрик:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

Бурада икинчи һəддэн башлаяраг ортаг 2 вуруғуну мə'тəри-зə харичинə чыхардаг. Мə'тəризə ичəрисиндə олан чəмин $s - 2^{63}$ бəрабэр олдуғу айдын кəрүнүр. Белəликлə,

$$s = 1 + 2(s - 2^{63})$$

вə я

$$s = 1 + 2s - 2^{64},$$

$$s = 2^{64} - 1$$

алмыш олуруг.

Бу гайда илə верилəчək бугданын мигдары 2^{64} гүввəтинин һесаблинмасына кəтирилир. Буну да я ардычыл вурма йолу илə вə я да

$$2^{64} = [(2^{16})^2]^2 = [(65536)^2]^2$$

шəклиндə һесабламаг лазым кəлир. Əкэр сонунчу квадрата йүксəлтмə əмəллəрини дə этмиш олсаг:

$$s = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

аларыг. Бу гəдэр бугда дənəлəрини ер үзүнə бəрабэр дəшə-миш олсаг 9 мм галынлығында бугда тəбəгəси мейдана кəл-миш олар.

Шүбһəсиздир ки, шаһзадə белə бир бəхшиши верə билмə-мишдир. Бу ардычыл гиймəтлəрдə кəрүнən үмуми гануна кəрə һәр сонра кəлэн һəдди тапмаг үчүн əввəlки һəдди икийə вур-маг лазым кəлир. Бурада алынан һəндəси силсилəнин ортаг вуруғу $q = 2$ -дир.

2. 1, -1, 1, -1, ... əдəдлэр ардычыллығы да һəндəси силсилəдир. Бурада биринчи һəдд $a_1 = 1$, ортаг вуруғ $q = -1$, үмуми һəдд исə $a_n = (-1)^{n-1}$ -ə бəрабэр олдуғу айдын кəрү-

нүр. $n = 1, 2, \dots$ гиймэтлэр версәк һәндәси силсиләнин бүтүн һәдләрени элдә эдә биләрик. Доғрудан да,

$$a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1,$$

$$a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1,$$

$$a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1 \text{ вә и. а.}$$

3. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ силсиләсини нәзәрдән кечирәк. Бу силсиләдә

$$a_1 = 1, \quad q = -\frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Доғрудан да n -ә натурал гиймәтләр вермәклә силсиләнин бүтүн һәдләрени элдә эдә биләрик.

$$a_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{2^{1-1}} = \frac{(-1)^0}{2^0} = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{2^{2-1}} = \frac{(-1)^1}{2^1} = -\frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{2^{3-1}} = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

вә и. а.

Юхарыдакы мисаллары нәзәрдән кечирсәк көрәрик ки, бу силсиләләрин бә'зиләриндә биринчи һәддән сонра кәлән һәдләр биринчи һәддән узаглашдыгча онларын мүтлэг гиймәти артыр, бә'зиләриндә сабит галыр, бә'зиләриндә исә һәдләрин мүтлэг гиймәти азалыр.

Тә'риф. Әкәр бир һәндәси силсиләнин һәдләри, сыра нөмрәси артдыгча мүтлэг гиймәтчә артарса, бу һәндәси силсиләйә *артан*, әксинә олараг силсиләнин һәдләри, сыра нөмрәси артдыгча мүтлэг гиймәтчә азаларса она *азалан һәндәси силсилә* дейилир. Айдындыр ки, артан һәндәси силсиләдә ортаг вуруг мүтлэг гиймәтчә 1-дән бөйүк, йә'ни $|q| > 1$, азаланда исә ортаг вуруг мүтлэг гиймәтчә 1-дән кичикдир. Гейд әдәк ки, һәндәси силсиләнин үмуми һәддинин формулуна, йә'ни (4) формулуна a_1, q, n вә a_n дахилдир. Һәмин әдәдләрдән үчүнү билсәк дөрдүнчүнү бу формулун көмәйи илә тапа биләрик вә дөрд нөв мәсәлә вә я мисал һәлл эдә биләрик.

1) 7, 21, 63, \dots һәндәси силсиләсиндә $a_1 = 7, a_2 = 21$ олдуғундан $a_2 = a_1 \cdot q, 21 = 7 \cdot q$ олар. Бурадан $q = \frac{21}{7} = 3$

алынар. Силсиләнин бешинчи һәддинин тапылмасы лазым кәлсә (4) формулунда $q = 3$ языб һәмин һәдди һесаблая биләрик:

$$a_5 = 7 \cdot 3^4 = 7 \cdot 81 = 567.$$

2) тутаг ки, бир һәндәси силсиләдә

$$a_n = 384, \quad a_1 = 1,5, \quad q = 4.$$

n -и, йә'ни һәдләрн сайы тапылмалыдыр.

Енә дә (4) формулуна көрә яза биләрик: $384 = 1,5 \cdot 4^{n-1}$, йә'ни $4^{n-1} = \frac{384}{1,5} = 256 = 4^4$, демәли, $n - 1 = 4$ вә я $n = 5$ олар.

2. Һәндәси орта

Инди ики вә бир нечә әдәдин һәндәси орта гиймәтини тә'йин әдәк. Тутаг ки, a, b мүсбәт әдәдләрн верилмишдир.

Тә'риф. \sqrt{ab} әдәдинә a вә b әдәдләрннн һәндәси орта гиймәти дейлир.

Һәмин тә'рифә истинад әдәрәк әдәдләрнн һәндәси орта гиймәтиннн бә'зи хассәләрннн көстәрәк.

1-чи хассә. a, \sqrt{ab}, b бир һәндәси силсиләнин һәдләрндир. Бу тәклифин доғрулуғу $\frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}}$ бәрабәрлийиндән көтүрүлүр.

2-чи хассә. Тутаг ки, $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \dots$ мүсбәт әдәдләрән ибарәт вә ортаг вурүғу q олан һәндәси силсиләдир. Бу силсиләнин һәр үч һәддиндән икинчи һәдди биринчи һәдди илә үчүнчү һәддин һәндәси орта гиймәтиндән ибарәтдир.

Һәндәси силсиләнин тә'рифинә көрә бир тәрәфдән $a_m = a_{m-1} \cdot q$, диһәр тәрәфдән $a_m = \frac{a_{m+1}}{q}$.

Бу ики бәрабәрлийи тәрәф-тәрәфә вурсаг $a_m^2 = a_{m-1} \cdot a_{m+1}$ бәрабәрлийини аларыг. Бурадан исә $a_m = \sqrt{a_{m-1} \cdot a_{m+1}}$ алынар.

Ики әдәдин һәндәси орта гиймәтинә верилән тә'рифи үмумиләшдирсәк, демәк олар ки, a, b, c, \dots, l кими n дәнә мүсбәт әдәдин һәндәси орта гиймәти $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot l}$ көкүнә дейлир.

Мисаллар. 1. Бир дүзбучағлы үчбучағын тәрәфләрннн узунлуғлары һәндәси силсиләнин һәдләрн ола биләрми?

Тутаг ки, үчбучағын тәрәфләрннн узунлуғу a, b, c -дир, белә ки, $a < b < c$. Әкәр бу әдәдләр һәндәси силсиләнин һәдләрндирсә, онда гейд этдийимиз хассәйә көрә

$$b^2 = ac \quad (*)$$

олар. Үчбучаг дүзбучаглы олдуғуна көрә

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (5)$$

олмалыдыр. Бу ики (*) вә (5) тәнликләрини биркә һәлл этсәк, бир тәрәфдән $a^2 + ac = c^2$, йә'ни $c^2 - ac - a^2 = 0$ олар, бу-

$$\text{радан } c = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$$

вә я

$$c = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{5}). \quad (6)$$

Дикәр тәрәфдән исә

$$b^2 = ac = \frac{a^2}{2} (1 + \sqrt{5})$$

вә я

$$b = \frac{a}{2} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \quad (7)$$

олар. Демәли, (6) вә (7) шәртләри юхарыдакы әлавә шәртләр дахилиндә дүзбучаглы үчбучағын тәрәфләринин узунлуғу олан a, b, c бир һәндәси силсиләнин һәдләри олмасы үчүн зәрури шәртдир. Бу шәртләр һәм дә кафидир. Ашағыдакы мисалларын һәлләдилмәси охучулара тапшырылыр.

2. Һансы дүзкүн үчбучағын отурачағы, һүндүрлүйү саһәсинин өлчүләри һәндәси силсилә тәшкил эдә биләр? Чаваб. Тәрәфләрин узунлуғу $\sqrt{3}$ олан үчбучаг.

3. Бир һәндәси силсиләнин һәдләри a, b, c, d оларса,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

олдуғуну исбат эдин.

4. 47 вә 1269 әдәдләри арасына ики орта мүтәнасиб әдәд дахил эдин. Чаваб. 141 вә 423.

3. Һәндәси силсиләнин сонлу сайда һәдләри чәминин формулу

Тутаг ки, ортаг вуруғу q олан

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Һәндәси силсиләси верилмишдир. Бу силсиләнин биринчи n һәддинин чәмини s_n илә ишарә эдәк:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \quad (8)$$

Һәндәси силсиләнин тә'рифинә көрә

$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q, \dots, a_n = a_{n-1} \cdot q$$

олмалыдыр. Онда

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q \quad (9)$$

олар. Сонунчу бəрəбərлiкдэн ортаг q вуругу мө'тəрчээ хари-
чинэ чыхардаг:

$$s_n = a_1 + q(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}).$$

(8) бəрəбərлiйиндэн $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = s_n - a_n$ бəрəбər-
лiйини тапыб (9)-да еринэ язсаг:

$$s_n = a_1 + q(s_n - a_n)$$

аларыг.

Бу ахырынчы бир дэрəчəли бир мəчһулла тэнлийи s_n -э
көрə һəлл эдэк: $qs_n - s_n = qa_n - a_1$.

Бурада, экэр $q \neq 1$ исэ

$$s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \quad (10)$$

олар. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ олдуғуну нэзэрə алсаг (10) бəрəбərлiйи

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (11)$$

шəклiндə язылыр. $q < 1$ олдугда (10) формулу

$$s_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} \quad (12)$$

шəклiндə язылыр.

Мисаллар. 1. 9750 эдəдини дөрл ерə элə айырын ки, элдə эдн
лэн эдəдлэр һəндəси силсилəнин һəдлэри олсун вə бу силси-
лəнин кəнар һəдлэринин фəрги илэ орта һəдлэри фəргинин
нисбəти $\frac{19}{6}$ -а бəрəбər олсун.

Силсилəнин тапачағымыз һəдлэрини a, b, c, d илэ ишарə
эдэк. Онда $a + b + c + d = 9750$ олмалыдыр вə я (11) фор-
мулуна көрə

$$s_4 = a \frac{1 - q^4}{1 - q} = a(1 + q + q^2 + q^3);$$

бурадан $a(1 + q + q^2 + q^3) = 9750$ олмалыдыр. Дикэр тэрəфдэн шəр-
тə көрə $\frac{a - d}{b - c} = \frac{19}{6}$ олмалыдыр вə я $\frac{a(1 - q^3)}{a(q - q^2)} = \frac{19}{5}$

олар. Сонунчу бəрəбərлiйи сэдэлəшдирсэк $\frac{1}{q}(1 + q + q^2) =$
 $= \frac{19}{6}$ аларыг; бурада $6q^2 + 6q + 6 = 19q$ квадрат тэнлийи

алынар. Һəмин тэнлийи һəлл эдэрэк $q = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} =$
 $= \frac{13 \pm 5}{12}$ аларыг. Онда, бир тэрəфдэн $q_1 = \frac{13 + 5}{12} = \frac{18}{12} =$
 $= \frac{3}{2}$, дикэр тэрəфдэн исэ $q_2 = \frac{13 - 5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ олар.

q -нүн биринчи гиймәтини еринә язсаг:

$$a \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} \right) = 9750 \quad \text{вә я} \quad \frac{65}{3} \cdot a = 9750$$

онда

$$a = \frac{78000}{65} = 1200 \text{ олар.}$$

Эләчә дә

$$b = a \cdot q = 1200 \cdot \frac{3}{2} = 1800,$$

$$c = b \cdot q = 1800 \cdot \frac{3}{2} = 2700,$$

$$d = c \cdot q = 2700 \cdot \frac{3}{2} = \frac{8100}{2} = 4050$$

олдуғуну көрмәк чәтин дейилдир. Беләликлә, 1200, 1800, 2700, 4050 әдәдләри ахтардығымыз һәндәси силсиләнин һәдләри олар.

2. Бир балонда 1250 л 80 фаизли спирт вардыр. Бу балондан үч дәфә бәрабәр мигдарда мае көтүрүлмүш вә һәр дәфә һәмин мигдарда су әлавә әтилмишдир. Ахырда мә'лум олмушдур ки, 125 л тәмиз спирт галмышдыр. Һәр дәфә балондан нә гәдәр спирт көтүрүлмүшдүр?

Мәсәләни һәлл әтмәк үчүн балонда илк дәфә нә гәдәр тәмиз спирт олдуғуну тә'йин әдәк. Ашкардыр ки, балонда 1250 л маеин 80 фаизи тәмиз спиртдир, йә'ни балонда $\frac{1250}{100} \cdot 80 = 1000$ л тәмиз спирт вардыр. Фәрз әдәк ки, 3 дәфә-

нин һәр бириндә балондан x л мае көтүрүлүр вә әвәзинә x л су әлавә әдилир.

Айдындыр ки, биринчи дәфә көтүрүлән x л маедә $1000 \cdot \frac{x}{1250}$ гәдәр тәмиз спирт көтүрүлүр. Төкүлән су, балонда

олан тәмиз спиртин мигдарыны дәйишдирмәдийиндән биринчи мүбадиләдән сонра балонда галан тәмиз спиртин мигдары

$$a_2 = 1000 - 1000 \cdot \frac{x}{1250} = 1000 \left(1 - \frac{x}{1250} \right) = 1000 \cdot \frac{1250 - x}{1250} \text{ л}$$

олар.

Асанлыгла көрмәк олар ки, икинчи вә үчүнчү мүбадиләдән сонра балонда галан тәмиз спиртин мигдары, ортаг вуруғу

$q = \frac{1250 - x}{1250}$ олан һәндәси силсиләнин һәдләридир.

Демәли, биринчи һәдди $a_1 = 1000$, ортаг вуруғу $q = \frac{1250 - x}{1250}$ вә

һәдләри сайы $n = 4$ олан һәндәси силсилә алырыг. Шәртә көрә

$$a_n = 1000 \cdot \left(\frac{1250 - x}{1250} \right)^3 = 125.$$

Бурадан

$$10 \cdot \frac{1250 - x}{1250} = 5$$

вә я

$$1250 - x = 625, \quad x = 1250 - 625 = 625$$

алынар.

Демәли, һәр дәфә балондан 625 л мае көтүрүлмүш вә әвәзинә 625 л су төкүлмүшдүр. Инди һәр дәфә балондан көтүрүлән тәмиз спиртин мигдарыны тапаг. Бурада

$$q = \frac{1250 - 625}{1250} = \frac{1}{2}$$

олар.

Балондан биринчи дәфә көтүрүлән тәмиз спиртин мигдары

$$1000 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ л},$$

икинчи дәфә көтүрүлмүш тәмиз спиртин мигдары

$$500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \text{ л},$$

үчүнчү дәфә көтүрүлмүш тәмиз спиртин мигдары исә

$$250 \cdot \frac{1}{2} = 125 \text{ л}$$

олар.

§ 5. РЕКУРРЕНТ АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР

Рекуррент сөзү франсызча башлангыча гайытмаг демәкдир. Рекуррент ардычыллыг әвәзиндә бә'зән гайыдан ардычыллыг да ишләдилер. Рекуррент ардычыллыглар анлайышы әдәди вә һәндәси ардычыллыглар анлайышынын үмүмиләшмәсидир. Бу ардычыллыглар анлайышы хусуси һалда натурал әдәдләрин квадратлары, кублары вә и. а. кими ардычыллыглары да әһәтә әдир. Тутаг ки,

$$u_1, u_2, \dots, u_n \quad (1)$$

ардычыллыгы вә k дәнә һәгиги a_1, a_2, \dots, a_k әдәдләри верилмишдир. Әкәр мүййән k нөмрәсиндән башлаяраг сонра кәлән бүтүн нөмрәләр үчүн

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (2)$$

$$(n \geq k \geq 1)$$

бәрабәрликләри тә'мин олунарсә, онда (1) ардычыллыгына k

тәртибдән рекуррент ардычыллыг вә (2) мүнәсибәтинә исә κ тәртибдән рекуррент тәнлик дейлир.

(2) тәнлийиндән көрүндүйү кими (1) ардычыллыгынын сонракы һәдләрини һесабламаг үчүн онун әввәлки һәдләринә гайытмаг лазым кәлир.

Рекуррент ардычыллыға аид бир нечә мисал көстәрәк.

1. **Һәндәси силсиләйә** аид бир мисал көтүрәк. Тутаг ки, (1) ардычыллыгы, өртаг вуруғу q олан һәндәси силсиләдир. Тә'рифә көрә $u_{n+1} = qu_n$ олмалыдыр. Бу мисалда $\kappa = 1$, $a_1 = q$ олдуғу айдындыр. Демәли, һәндәси силсилә ваһид тәртибли рекуррент ардычыллыгдыр.

2. **Әдәди силсиләйә** аид бир мисал көтүрәк. Тутаг ки, (1) ардычыллыгы, фәрги d олан әдәди ардычыллыгдыр. Тә'рифә көрә $u_{n+1} = u_n + d$ олмалыдыр. Бу исә (2) тәнлийи шәклиндә язылмамышдыр, чүнки (2) мүнәсибәтиндә сәрбәст һәдд йок дур. Лакин әдәди силсиләнин һәдләрини (2) шәклинә асанлыгла салмаг олар. Онун үчүн далбадал кәлән ики һәдди

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d$$

$$u_{n+1} = u_n + d$$

тәрәф-тәрәфә чыхаг. Бу һалда аларыг:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

вә я

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

олар. Бу исә $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $\kappa = 2$ олдуғуну көстәрир. Демәли, әдәди силсилә ики тәртибли рекуррент ардычыллыгдыр.

3. **Тарихи мәсәлә.** (Фибоначчинин мәсәләси)¹. Мә'лум олдуғуна көрә һәр бир чүт еткин довшандан айда бир чүт бала төрәйир. Белә ки, тәзә доғулан довшанлар бир ай әрзиндә тамам еткинләшир. Мәсәләдә сорушулур ки, бир чүт еткин довшандан бир ил мүддәтиндә нечә чүт еткин довшан төрәйир.

Һәмин мәсәләни рекуррент ардычыллыглар васитәсилә һәлл әдәк. Ашкардыр ки, мәсәләнин шәртинә көрә илин әввәлиндә бир чүт еткин довшан вардыр, йә'ни $u_1 = 1$ -дир. Бир айдан сонра даһа бир чүт довшан төрәйир. Амма еткин чүтләр енә дә әввәлдә олдуғу кими бир чүт олагаг галыр. Демәли, $u_2 = 1$ -дир. Ики айдан сонра довшан балалары еткинләшир вә еткин довшанларын үмуми сайы ики чүт, йә'ни $u_3 = 2$ олур. Үч айдан сонра исә еткин довшанларын сайы үч чүт олур. Мәсәләни һәлл әтмәк үчүн риязи индуксия методундан истифадә әтмәк лазым кәлир. Тутаг ки, $n-1$ айдан сонра еткин довшанларын сайы u_n , n айдан сонра исә u_{n+1} -дир. Бу мүддәт әрзиндә габагча олан u_n еткин чүтдән даһа u_n бала довшан

¹Фибоначчи вә я Леонардо Пизаниски орта әсрләрин италян риязий-ятчысыдыр. Бу мәсәләни тәғрибән 1204-чү илдә сөйләмишдир.

төрөдийн үчүн $n + 1$ айдан сонра еткин чүтлэрин үмүмий сайы $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ олар. Онда

$$u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5,$$

$$u_6 = u_5 + u_4 = 5 + 3 = 8,$$

$$u_7 = u_6 + u_5 = 8 + 5 = 13$$

алынар. Белэликлэ, эввэлчэ (u_1), бир айдан сонра (u_2), ики айдан сонра (u_3), үмүмийэтлэ n айдан сонра (u_{n+1}) вэ и. а. еткин довшанларын сайы

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \quad (3)$$

ардычыллыгы илэ мүййөн эдилир. Бу ардычыллыгын һәр сонра кэлэн һэдди билаваситэ ики эввэл кэлэн һэддин чэминэ бəрəбəрдир. Һəмин гайда илэ он ики айдан сонра 144 чүт еткин довшан төрəйэчəйини һесабламаг чəтин дейилдир.

(3) ардычыллыгына Фибоначчи ардычыллыгы, онун эдэдлэринэ исэ Фибоначчи эдэдлэри дейилир. Үмүмийэтлэ, Фибоначчи ардычыллыгында u_1, u_2 -йэ башлангыч гиймэтлэр дейилир. Бу гиймэтлэр васитəсилэ ардычыллыгын галан бүтүн һэдлэри һесабланыр. Һəмин гиймэтлэри дəйишдирмəклэ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ганунийəтинэ рийəт эдиб сайсыз-һесабсыз Фибоначчи ардычыллыглары вэ эдэдлэри əлдэ эдэ билəрик.

4. Даһа бир мисал кəстəрəк, тутаг ки, натурал эдэдлэрин квадратлары ардычыллыгы верилмишдир:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

Айдындыр ки, бу ардычыллыгын үмүмий һэдди $u_n = n^2$ олар. Элəчэ дэ $u_{n+1} = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2n + 1$ олар. Бурадан билаваситэ натурал эдэдлэрин квадратларындан дүзəлмиш ардычыллыгын рекуррент ардычыллыг олдуғуну һəкм этмəк олмур, лакин $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ ифадəсиндэ n -ин үзəринэ бир ваһид кəлсəк $u_{n+2} = u_{n+1} + 2(n+1) + 1 = u_{n+1} + 2n + 3$ олдуғуну кəрəрик. Алына ики бəрəбəрлийи тəрəф-тəрəфə чыхсаг, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2$ олар. Бурадан $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$ алынар. Бу сонунчу ифадəдэ n -ин үзəринэ даһа бир ваһид кəлсəк $u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + 2$ мүнəсибəтини əлдэ эдəрик. Инди ахырынчы ики бəрəбəрлийи тəрəф-тəрəфə чыхаг:

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

вэ бурадан

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

рекуррент мүнəсибəти əлдэ эдилир. Бу исэ натурал эдэдлэрин квадратларындан дүзəлмиш ардычыллыгын үч тəртибли рекуррент ардычыллыгы олдуғуну кəстəрир. Əкəр кəстəрилэн гайда илэ натурал эдэдлэрин $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3, \dots$ кублары ардычыллыгыны тəдгиг этмиш олсаг $u_n = n^3$ олдуғуну нэзэрə алыб

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n$$

рекуррент мүнәсибәтини әлдә әдә биләрик. Демәли, натурал әдәлләрин кубларындан дүзәлдилмиш ардычыллыг дөрдүнчү тәртибли рекуррент ардычыллыгдыр.

Нәһайәт гөйд әдәк ки, бүтүн дөври ардычыллыглар рекуррентдир. О чүмләдән сонсуз дөври онлуг кәсрләрин онлуг ишарәләри рекуррент ардычыллыг тәшкил әдир.

Рекуррент ардычыллыгын үмуми хассәләриндән бирини дө гөйд әдәк:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_n u_n$$

рекуррент тәнлийини өдәйән һәр бир рекуррент ардычыллыг мүйәйән $P(x)$ чохәдлисинин

$$Q(x) = 1 - a_1 x + \dots - a_k x^k$$

чохәдлисинә бөлүнмәсиндән алынған коэффицентләрдән дүзәлмиш ардычыллыгла әйни олур. Һәмин чохәдли

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1 u_1) + \dots + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \dots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}$$

шәклиндәдир. Бу тәклифин исбаты охучулара тапшырылыр.

Инди рекуррент ардычыллыгларын башга бир хассәси үзәриндә даянаг. Тутаг ки, (2) шәрти дахилиндә (1) ардычыллыгы k тәртибли рекуррент ардычыллыгы верилмишдир. Исбат әдәк ки, $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2$, \dots , $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, ардычыллыг k тәртибли (1) рекуррент ардычыллыгын һәдләринин чәминдән дүзәлмиш рекуррент ардычыллыгдыр вә онун һәдләри

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} + (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \dots + a_k s_n \quad (4)$$

рекуррент тәнликләрини өдәйир.

Догрудан да,

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \dots$$

$$u_n = s_n - (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$$

олур. $s_0 = 0$ фәрз әдиб $u_1 = s_1 - s_0$ шәклиндә язсаг (2) тәнлийиндә $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ һәдләринин онларын $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ чәмләри васитәсилә олан ифадәләрини еринә язаг:

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1 (s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + a_2 (s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \dots + a_k (s_n - s_{n-1}),$$

вә я

$$s_{n+k} = (1 + a_1) s_{n+k-1} + (a_2 - a_1) s_{n+k-2} + \dots + (a_k - a_{k-1}) s_n - a_k s_{n-1}$$

олар. Бу ифадәдә n -и $n+1$ илә әвәз әтсәк (4) тәнлийини әлдә әдәрик. Ардычыллыгларын һәдләри чәми үчүн дүзәлән бу рекуррент тәнликләр онларын хүсуси чәмләрини тапмаға имкан верир. Мәсәлән, һәндәси силсилә үчүн $u_n = a_1 q^{n-1}$, $u_{n+1} = q u_n$ вә $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$ олдуғундан $s_{n+2} = (1 + q) s_{n+1} - q s_n$ олар. Натурал әдәдләрин

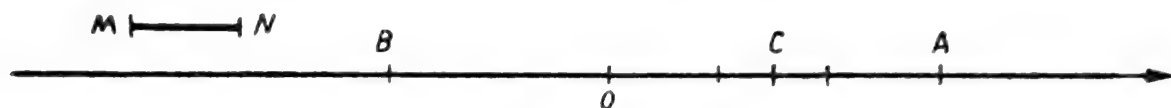
Квадратларындан дүзэлмиш ардычыллыг үчүн исә хүсуси чөл-
ләрин рекуррент мүнәсибәти

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n$$

ифадәсилә тә'йин әдилир.

§ 6. АРДЫЧЫЛЛЫГЛАРЫН ҺӘНДӘСИ ТӘСВИРИ

Инди ардычыллыгларын бә'зи дахили ганунларыны өйрә-
нәк. Бу ганунларын бә'зиләри үмуми маһийәт дашыйыр,
бә'зиләри исә бу вә я дикәр конкрет ардычыллыгларын мәһз
өзүнә мәхсус олур. Ери кәлдикчә белә ганунлары гейд әдә-
чәйик. Һәр шейдән әввәл ардычыллыгын һәдләринин нөмрә-
ләри артмагла о һәдләрин дәйишмәси ганунларыны, бу дәйиш-
мәнин сүр'әтини тапмаг кими мәсәләләрин һәлли илә мәшғул
олачакыг. Она көрә дә әввәлчә ардычыллыглары һәндәси тәс-
вир әдәк. Бу мәгсәдлә әдәд оху көтүрәк (10-чу шәкил).



10-чу шәкил

Әдәд оху үзәриндә верилмиш әдәдләрә уйғун нөгтә тапмаг
үчүн әввәлчә өлчү ваһиди гәбул этмәлийик.

Мәсәлән, MN парчасыны ваһид парча гәбул әдәк (10-чу
шәкил). Әкәр дүз хәтт үзәриндә $+3$ әдәдинә уйғун нөгтәни
тапмаг лазым кәләрсә, онда O нөгтәсиндән башлаяраг саға
доғру гәбул этдийимиз ваһид парчадан 3 дәфә бөйүк бир пар-
ча айырмалыйыг. Бу парчанын сағ учуну A илә ишарә әдәк.
Онда OA парчасынын узунлуғу 3 ваһид олар. Бу мә'нада A
нөгтәси $+3$ әдәдинә уйғун олур. Әкәр дүз хәтт үзәриндә -2
әдәдилә уйғун нөгтә тапмаг лазым кәләрсә, O нөгтәсин-
дән башлаяраг сол тәрәфдә бир учу O нөгтәсиндә олан
вә верилмиш ваһид парчадан ики дәфә бөйүк бир парча
көтүрмәлийик (һәммин парчанын уч нөгтәсини B илә ишарә
әдәк).

Верилмиш әдәд иррасионал олдуғда мә'лум гайдадан исти-
фадә әдиб ону әдәд оху үзәриндә гура биләрик.

Бу гайда илә габагчадан верилән һәр бир әдәдә дүз хәтт
үзәриндә уйғун олан бир нөгтә тапмаг олар.

Тәрсинә, дүз хәтт үзәриндә бир учу O нөгтәсиндә вә ди-
кәр учу C нөгтәсиндә олан һәр һансы парча көтүрмүш олсаг,
бу парчада ваһид парча нечә дәфә ерләширсә алынан әдәд
парчанын дикәр уч нөгтәсинә гаршы гоюлмуш олур.

Мәсәлән, шәкилдә көтүрүлән OC парчасында ваһид парча 1,5
дәфә ерләшир. Она көрә дә 1,5 әдәдини C нөгтәсинә гаршы гоюруг.

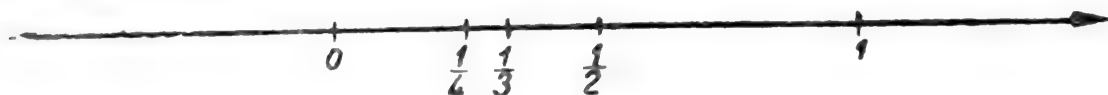
Демәли һәр бир әдәдлә уйғун олан дүз хәтт үзәриндә
бир нөгтә тә тәрсинә, дүз хәтт үзәриндә һәр нөгтә илә уйғун
олан бир әдәд вардыр. Буну нәзәрә алараг верилмиш һәр бир

эдэдләр ардычыллыгыны эдэд охуна көчүрмәк олар. Мәсәлән,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (1)$$

ардычыллыгыны эдэд охуна көчүрмәк үчүн әввәлчә ардычыллыгын биринчи һәдди олан $a_1 = 1$ эдәдилә уйгун нөгтәни тапаг вә ону 1 илә ишарә эдәк. Сонра ардычыллыгын икинчи һәдди олан $a_2 = \frac{1}{2}$ эдәд илә уйгун нөгтәни эдәд оху үзәриндә тапаг вә ону $\frac{1}{2}$ илә ишарә эдәк вә и. а. Бу гайда илә ардычыллыгын ихтияри $a_n = \frac{1}{n}$ һәддилә уйгун олан нөгтәни эдәд оху үзәриндә тапаг вә ону $\frac{1}{n}$ илә ишарә эдәк (11-чи шәкил).

Шәкилдән көрүндүйү кими ардычыллыгын һәдләринин дурдуглары ерләринин нөмрәләри артдыгча ардычыллыгын һәдләри



11-чи шәкил

о нөгтәсинә доғру сыхлашыр. О нөгтәсиндән саға вә сола узунлуғу ϵ олан бир парча айырмыш олсаг, көтүрдүйүмүз ардычыллыгын бүтүн һәдләри кеч вә я тез мүййән һәддән башлаяраг һәмин парчада ерләшәчәкдир.

Мәсәлән, $\epsilon = 2$ олса (1) ардычыллыгынын бүтүн һәдләри $[0, 2]$ парчасына дахил олар. $\epsilon = \frac{1}{3}$ олса ардычыллыгын биринчи, икинчи һәддиндән башга (бу һәдләр ϵ парчасындан кәнарда галар) бүтүн һәдләри узунлуғу $\epsilon = \frac{1}{3}$ олан парчадан (бир учу 0 олан) ерләшәчәкдир. $\epsilon = \frac{1}{10}$ көтүрүлсә $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, һәдләр ϵ парчасында, ардычыллыгын биринчи 10 һәдди исә һәмин парчадан кәнарда ерләшәчәкдир. Бу һалларын һамыында (1) ардычыллыгынын мүййән һәдләриндән башлаяраг сонра кәлән бүтүн һәдләри габагчадан верилмиш узунлуғу ϵ олан парчада ерләшир.

Беләликлә, бир учу 0 нөгтәсиндә олан верилмиш һәр парчанын ичәрисиндә (1) ардычыллыгыны сонсуз сайда, харичиндә исә сонлу сайда һәдләри ерләшир.

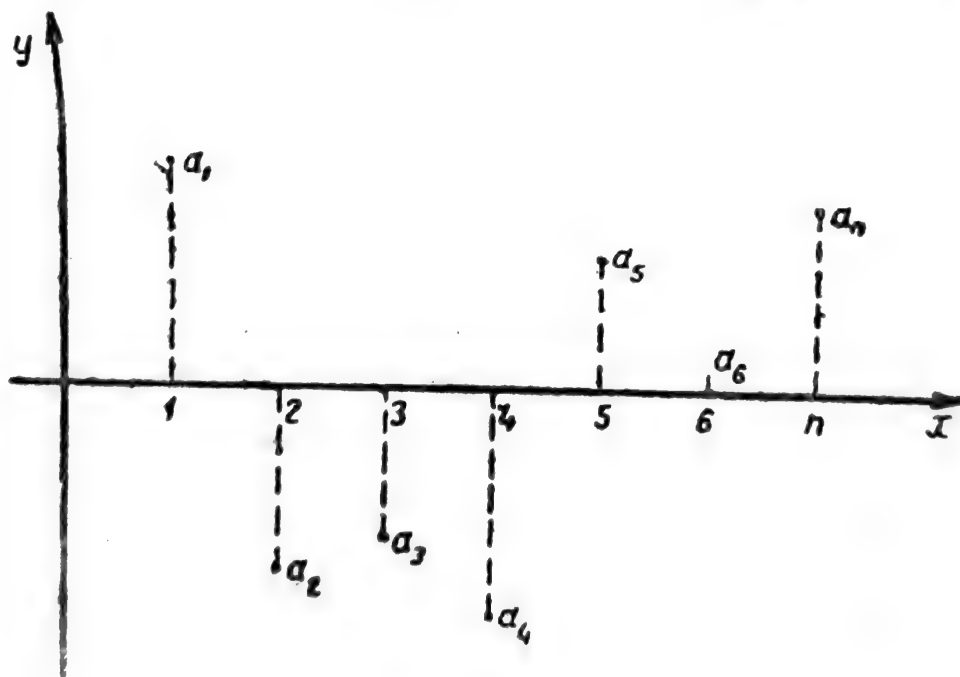
Демәли, (1) ардычыллыгынын сонсуз сайда һәдләри, бою истәнилән гәдәр кичик көтүрүлә билән парчанын дахилиндә ерләшир; башга сөзлә ардычыллыгын һәдләринин нөмрәси артдыгча ардычыллыгын һәдләри сыфра кет-кедә даһа яхын олур. Бу һәгигәт үмумийәтлә белә сөйләнилир: габагчадан верилмиш һәр бир мүсбәт ϵ әдәдинә көрә әлә $N > 0$ әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн $|a_n| < \epsilon$ оларса,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (2)$$

ардычыллыгы сыфра йығылыр вә белә ишарә әдилир:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

бурада $n \rightarrow \infty$ ишарәси n -нин һүдудсуз артдыгыны көстәрир. Бә'зән ардычыллыгын һәдләринин дәйишмәсини әдәд оху үзәриндә дейил, мүстәви үзәриндә даһа әяни көрмәк олур. Бир мүстәвидә башлангыч o нөгтәсиндә кәсишән горизонтал вә вертикал охлар (абсис вә ординат охлары) көтүрәк. Горизонтал ох үзәриндә бүтүн натурал әдәдләри гейд әдәк (2) ардычыллыгынын a_1 биринчи һәддини, горизонтал ох үзәриндә l нөгтәсиндә галдырылан перпендикуляр үзәриндә гейд әдәк (йә'ни һәммин перпендикуляр үзәриндә узунлуғу a_1 -ә бәрәбәр олан парча айыраг), белә ки, әкәр $a_1 > 0$ оларса, горизонтал охдан

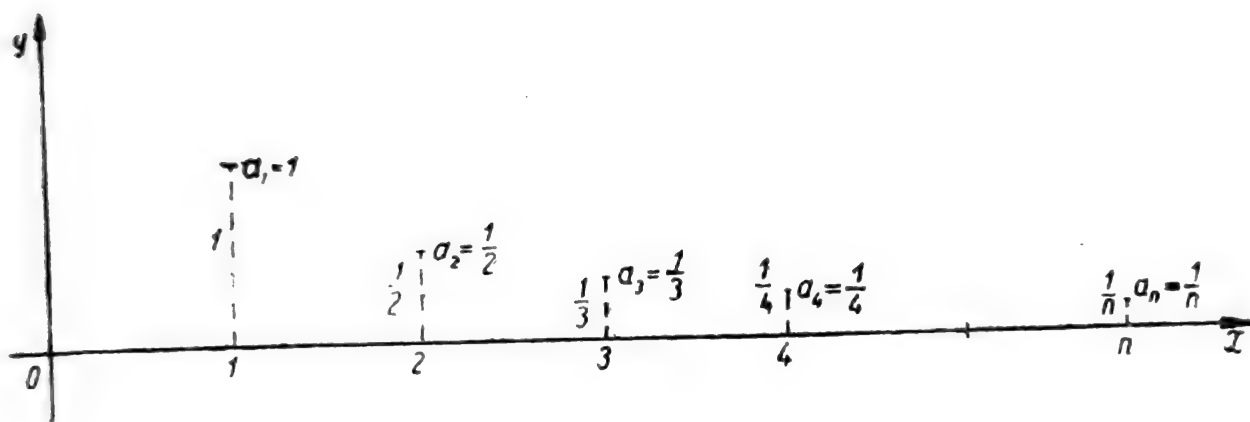


12-чи шәкил

юхарыда, $a_1 < 0$ оlanda һәммин перпендикуляр үзәриндә a_1 нөгтәсини горизонтал охдан ашағыда гейд әдәк, $a_1 = 0$ оlanda гурачағымыз нөгтә горизонтал хәтт үзәриндәки l нөгтәси үзәриндән тәкратр әтмәклә (2) ардычыллыгынын һәдләрини мүстәвийә көчүрмәк олар (12-чи шәкил). Бу гайда илә дә (1) арды-

чыллыгынын һәдләрини мүстәви үзәринә көчүрсәк 13-чү шәкилдә тәсвир әдилән a_1, a_2, \dots нөгтәләрини әлдә әдәрик.

13-чү шәкилдән көрүндүйү кими n -артдыгча $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ нөгтәләриндә чәкилән уйғун перпендикулярларын бойлары



13-чү шәкил

азалыр. $n \rightarrow \infty$ шәтиндә исә һәмин перпендикуляр парчаларын бойлары сыфра яхынлашыр.

Инди

$$1, -1, +1, -1, \dots, (-1)^{n-1} \quad (3)$$

ардычыллыгыны көтүрәк. Бу ардычыллыгынын һәдләрини мүстәви үзәринә көчүрсәк алынан нөгтәләрин абсис (горизонтал) охундан каһ юхары, каһ да ашағы дүшдүйүнү көрәрик (14-чү шәкил), йә'ни (3) ардычыллыгынын һәдләри абсис оху әтрафында рәгс әдиб мүәййән бир әдәдә яхынлашмаячагдыр.

Башга бир ардычыллыг көтүрәк:

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots \quad (4)$$

Бу ардычыллыгы һәм биринчи вә һәм дә икинчи үсулла һәндәси тәсвир әдәк.



14-чү шәкил

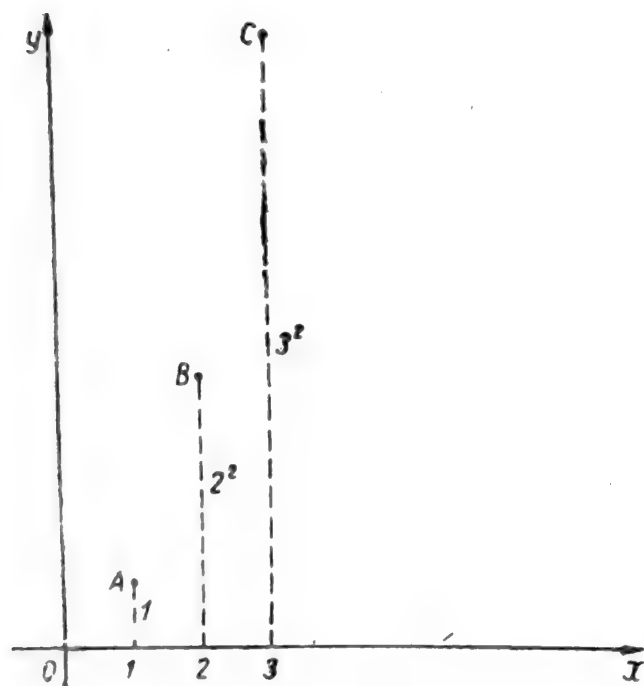
15-чи шәкил

башлангычдан (0—нөгтәсиндән) олан мәсафәләрин квадраты сүр'әти илә башлангыч нөгтәсиндән узаглашачагдыр (15-чи шәкил).

Верилмиш ардычыллыгы әдәд охуна көчүрмүш олсаг (биринчи үсул) бу әдәдләрә уйғун нөгтәләр

Габагчадан нэ бөйүклүкдэ бир эдэд олурса олсуи (4) ардычыллыгынын һэдлэри мвэйиэн һэддэн башлаяраг һәмин эдэддэн бөйүк олачаг вэ бөйүклүкдэ давам эдэчәкдир.

Әкәр һәмин ардычыллыгы икинчи үсулла һэндәси тәсвир этсәк, йә'ни (4) ардычыллыгынын һэдләрини мүстәви үзәринә көчүрсәк, һэдләрин нөмрәси артдыгча ардычыллыгын һэдләринә уйғун олан нөгтәләр башланғыч нөгтәдән узаглашагчаг вэ узаглашмагда давам эдэчәкдир (16-чы шәкил).



16-чы шәкил

Шәкил үзрә верилмиш белә тәсвири бәрабәрсизликләр дилинә дә кечирә биләрик. Фәрз эдәк ки, габагчадан $M=10000$ эдәди верилмишдир. Белә бир суал ортая чыхыр: (4) ардычыллыгынын $M=10000$ эдәдини ашан һэдлэри вармы, йохса (4) ардычыллыгынын бүтүн һэдлэри верилмиш M эдәдиндән кичикдир? Бу суала чаваб вермәк үчүн (4) ардычыллыгынын үмуми һэддини, йә'ни $a_n=n^2$ һэддини 10000 эдәди илә мүгайисә этмәлийик. Ардычыллыгы $a_n>M$ бәрабәрсизлийини өдәйән һэдлэри вармы? Көстәрәк ки, (4) ардычыллыгынын сонсуз сайда белә һэдлэри

вардыр. Доғруданда, $n^2>10000$ бәрабәрсизлийи $n>100$ олан нөмрәләр үчүн өдәнилик. Мәсәлән, $n=101$ олса, $a_{101}=(101)^2=10201$ олар. $10201>10000$ олдуғундан $N=101$ нөмрәсиндән башлаяраг кәлән бүтүн нөмрәләр үчүн, йә'ни $n>N=101$ үчүн $n^2>10000$ олачагдыр.

Әкәр габагчадан көтүрүлән эдэд $M=10^6$ олса, онда енә дә элә бир натурал $N>0$ тапмаг олар ки, $n>N$ оlanda, $n^2>10^6$ олар. Айдындыр ки, $n>10^3$ оlanda, $n^2>10^6$ олар. Она көрә дә $N=1001$ гәбул этсәк, нөмрәси 1001 -дән бөйүк олан бүтүн һэдләр 10^6 -дан бөйүк олачагдыр. Мәсәлән, $a_{1002}=1002^2=1004004>1000000$ һәдди вэ ардычыллыгын сонра кәлән бүтүн һэдлэри 10^6 -дән бөйүк олачагдыр. Беләликлә, габагчадан көтүрүлән $M>0$ эдәди нә гәдәр бөйүк эдэд олса белә, һәмишә элә натурал $N>0$ эдәди тапмаг мүмкүндүр ки, $n>N$ олан һәр бир n үчүн $a_n>M$ олачагдыр. Башга сөзлә n -ин артмасы илә ардычыллыгын һэдлэри һүдудсуз олараг артыр. Белә ардычыллыглара *гейри-мәһдуд* вэ я *дағылан ардычыллыг* дейилир. Әксинә (1), (3) ардычыллыглары мәһдуд ардычыллыглардыр. Бу

ардычыллыгларын һәр икисинин бүтүн һәдләри 1-и ашмыр. Бу ардычыллыглардын (1) ардычыллыгы йығылан, (3) ардычыллыгы исә дағылан ардычыллыгды).

Биз бә'зи хусуси ардычыллыгларын йығылыб-дағылмаларыны бир гәдәр сәтһи, ингунтив йол илә тә'йин этдик. Инди исә һаггында данышдығымыз риязи анлайышларын чидди тә'рифләрини верәк.

§ 7. ЛИМИТ ҺАГГЫНДА

Кәмийәтләрин дәйишмә просесләрини нәзәрдән кечирлик-дә көрүрүк ки, онлардан бә'зиләринин дәйишмә просеси арасы кәсилмәйән—фасиләсиз, бә'зиләрининки исә фасиләли—сычрайышлыдыр. Мәсәлән, бошлугда сәрбәст дүшән чисмин ерә энмә просеси фасиләсиз—кәсилмәз просесдир вә бу просес замачы чисмин кетдийи йол кәсилмәз дәйишән кәмийәтдир. Бурада чисмин ердән олан һүндүрлүйү арасы кәсилмәдән дәйишәрәк сыфра яхынлашыр. Бу кәмийәти x илә ишарә әдәк. Айдындыр ки, дәйишән x кәмийәти сычрайышларла дейил, арасы кәсилмәдән сыфра яхынлашачагдыр.

Биз, эйни заманда, гиймәтләри әдәдләр ардычыллыгы тәшkil эдән дәйишән кәмийәтләрдән дә юхарыда данышдыг вә белә дәйишән кәмийәти x_n шәклиндә язмагы шәртләшдик. Бурада n -ә сәрбәст дәйишән (аргумент), x_n -ә исә асылы олараг дәйишән (функция) кими баха биләрик; йә'ни гиймәтләри

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

ардычыллыгыны тәшkil эдән кәмийәтә, аргументи n олан функция кими дә баха биләрик. Бу функция $n=1, 2, 3, \dots$ вә и. а. натурал гиймәтләрлә тә'йин әдилмишдир, йә'ни n -ин һәр бир натурал гиймәтләриндә x_n -ин мүййән бир гиймәти вардыр. Она көрә дә бурадан натурал әдәдләр чохлуғуна x_n -ин тә'йин олдуғу чохлуг дейилир.

Натурал әдәдләр чохлуғунда тә'йин әдилән функциялара аргументи там гиймәтли функциялар дейилир вә $f(n)$ илә ишарә әдилир. Бурада f символу n -ин үзәриндә апарылачаг бүтүн әмәлләри кәстәрир. Мәсәлән $f(n)=n^2$ там аргументли функциядыр. Бурада f символу n -и квадрата йүксәлтмә әмәлини әвәз әдир.

Лакин аргументи ялныз натурал гиймәтләр дейил, кәсилмәз гиймәтләр алан функциялар да аз дейилдир. Мәсәлән,

$$f(t) = \frac{gt^2}{2}$$

функциясынын гиймәтләри васитәсилә сәрбәст дүшән чисмин кетдийи йолун узунлуғуну һесаблайырлар. Бурада g һәммин мәһәлдә сәрбәст дүшмә тә'чили, t исә дүшмә заманы олуб, арасы кәсилмәдән дәйишир.

Демәли, истәр аргументи там гиймәтли, истәрсә дә кәсилмәз гиймәтли функциялар үмүмийәтлә, дәйишән кәмийәтин

элэ хүсуси халыдыр ки, бурада бир дэйишэн кэмиййэт өз дэйишмэ просесиндэ башга дэйишэн кэмиййэтдэн асылы олур.

Нэзэрдэн кечирдийимиз мисалда заман сэрбэст дэйишэндир, кедилэн йол исэ замандан асылы олараг дэйишир.

Аргументи x илэ, функцияны $y=f(x)$ илэ ишарэ эдэк. Функцияя һэгиги гиймэтлэр верэн аргументин гиймэтлэри чохлуғуна *функциянын варлыг областы* дейилир.

Бурада үмүмиййэтлэ, f символу $f(x)$ кэмиййэтинин дэйишмэ ганунуну, дэйишмэ просесинин кедишини, x исэ просесин халларыны мүййэн эдир.

Инди дэйишэн кэмиййэтин лимитинин тэ'рифини верэк.

Тэ'риф. Экэр дэйишэн x кэмиййэти илэ сабит a эдэди арасындакы фэргин $|x-a|$ мүтлэг гиймэти, дэйишмэ просесинин мүййэн халындан башлаяраг сонра кэлэн бүтүн халларда, габагчадан верилэн ихтияри мүсбэт эдэддэн кичик оларса вэ кичилмэйиндэ давам эдэрсэ, онда белэ дэйишэн x кэмиййэтинин лимити сабит a эдэдибир вэ я x дэйишэн кэмиййэти a эдэдинэ яхынлашыр. Буну

$$x \rightarrow a \text{ вэ я } \lim x = a$$

шэклиндэ ишарэ эдирлэр.

Дэйишэн кэмиййэтин лимитинэ вердийимиз тэ'рифи бир гэдэр изаһ эдэк. Тэ'рифдэ дэйишэн кэмиййэтлэрин сабит эдэддэн олан фэргинин мүтлэг гиймэти габагчадан верилэн ихтияри мүсбэт эдэдлэ мүгайисэ эдибир. Бу мүгайисэнин ики мүһүм чөһэти нэзэрэ алынмалыдыр. Биринчи чөһэт, дэйишэн кэмиййэтин сабит эдэдлэ мүгайисэсиндэ габагчадан верилэн мүсбэт эдэдин там ихтияри олмасыдыр. Икинчи чөһэт исэ кэмиййэтин дэйишмэ просесинин элэ бир халынын мөвчуд олмасыдыр ки, бу халдан сонра кэмиййэтин алдығы гиймэтлэрлэ сабит эдэд арасындакы фэрг мүтлэг гиймэтчэ габагчадан верилэн һэр бир мүсбэт эдэддэн кичик олур. Һэр бир дэйишэн кэмиййэтин дэйишмэ просесинин өзүнэ мэхсус халлары вардыр. Мэсэлэн, x кэмиййэти замандан асылы олараг дэйишдикдэ, $|x-a|$ фэрги мүййэн замандан башлаяраг кэлэчэк заманларда габагчадан верилэн ихтияри мүсбэт эдэддэн кичик олур. Бурада дэйишмэ просеси заманла элагэдардыр. Кэмиййэтин алдығы гиймэтлэрдэн ардычыллыг дүзэлтмэк мүмкүндүрсэ, просесин юхарыда гейд этийимиз мүййэн халы эвэзиндэ ардычыллығын һэдлэринин мүййэн нөмрөси сечилмэлидир. Она көрө дэ дэйишэн кэмиййэтин лимитинэ верилэн тэ'риф ардычыллыг үчүн ашағыдакы кими олмалыдыр.

Тэ'риф. Экэр габагчадан верилэн һэр бир мүсбэт ϵ эдэдинэ көрө элэ бир натурал N эдэди вардыса ки, $n > N$ бэрабэрсизлийини өдэйэн бүтүн n -лэр үчүн (1) ардычыллығынын һэдлэри илэ сабит a эдэдинин фэрглэри мүтлэг гиймэтчэ ϵ эдэдиндэн кичик оларса, йэ'ни $n > N$ олдугда $|x_n - a| < \epsilon$ оларса,

сабит a эдэдинэ (1) ардычыллыгынын лимити дейилир вэ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

шэклиндэ язылыр. Сонлу лимити олан һэр бир ардычыллыга йығылан ардычыллыг дейилир. Бу тэ'рифин эсл маңийэтини билмэк үчүн онун ашағыдакы эсас чәһәтләринэ хүсуси фикир верилмәлидир:

1) габагчадан верилән мүсбәт ε эдәди ихияридир. Бу чәһәт ардычыллыгын кифайәт гәдәр бөйүк нөмрәли һәдләринин сабит a эдәдиндән олан фәргләринин мүтләг гиймәтчә һэр бир мүсбәт эдәддән кичик ола билмәсини кәстәрир.

2) верилмиш $\varepsilon > 0$ эдәдинэ көрә натурал N эдәди сечилә биләр. Бу чәһәт натурал N эдәдинин ε -дан асылылығыны кәстәрир. Айры-айры ардычыллыглар үчүн бу асылылығы арашдырмыш олсаг, үмумийәтлә көрәрик ки, $\varepsilon > 0$ эдәди кичилдикчә натурал N эдәди артыр, йә'ни x_n илә a эдәдләри арасындакы фәргин мүтләг гиймәтини кифайәт гәдәр кичик ε -дән кичик этмәк үчүн кифайәт гәдәр бөйүк нөмрәли һәдләрин кәтүрүлмәси лазым кәлир. Биз N -ин ε -дан асылы олараг сечилмәсини юхарыдакы мисалларда гисмән көрдүк.

3) тә'рифдә мә'лум a эдәдинин (1) ардычыллыгынын лимити олдуғу кәстәрилир. Верилмиш ардычыллыгын лимитини тапмаг гайдасы исә кәстәрилмир.

Дәйишән кәмийәтин лимитинә верилән тә'рифи кәсилмәз аргументли функция һаггында демәкдән өтрү әввәлчә аргументин дәйишәрәк мүәййән сабит a эдәдинә яхынлашдығыны (бу әввәлчәдән мә'лум олмалыдыр), сонра исә x -и a -я яхынлашдырдыгда $f(x)$ -ин мүәййән бир b эдәдинә яхынлашыбы яхынлашмадығыны билмәлийик.

Тә'риф. Әкәр габагчадан верилән һэр бир мүсбәт ε эдәдинә көрә, дикәр бир мүсбәт δ эдәди тапмаг мүмкүндүрсә вә $|x - a| < \delta$ бәрабәрсизлийини өдәйән бүтүн x -ләр үчүн

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

оларса, онда x дәйишәрәк a -я яхынлашдыгда ($x \neq a$) b эдәдинә $f(x)$ функциясынын лимити дейилир вә белә ишарә эдилир:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Гейд этмәк лазымдыр ки, верилмиш $f(x)$ функциясына көрә δ эдәди, габагчадан верилән ε эдәдинә көрә сечилир. Енә дә ε -ун ихтияри олмасы x эдәди a -я яхынлашанда $f(x)$ илә сабит b эдәди арасындакы фәргин мүтләг гиймәтини истәнилән гәдәр кичик эдилә билмә имканыны мүәййән эдир.

Юхарыдакы тә'риф $x \rightarrow \infty$ -да белә дейилир, әкәр габагчадан верилән һэр бир мүсбәт ε эдәдинә көрә x -ин элә x_0 гиймәти тапыла биләрсә ки,

$$|f(x_0) - b| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлийи x_0 -дан башлаяраг $f(x)$ -ин тә'йин областына дахил олуб, сонра кәлән бүтүн x -ләр үчүн өдәниләрсә, онда x сонсузлуға яхынлашдыгда b әдәдинә $f(x)$ функциясынын лимити дейилир вә

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

шәклиндә ишарә әдилир.

Лимитин тапылмасында да юхарыдакы тә'рифләрин ролу аз дейилдир. Чох вахт, верилмиш кәмийәтин лимитинин мүйәйән әдәдә бәрабәр олдуғу сезилир, сонра исә кәмийәтин лимитинин һәмин әдәдә һәгигәтән бәрабәр олдуғу тә'риф васитәси илә йохланылыр.

Биз бу чәһәтләри айры-айры ардычыллығын лимитинин тапылмасында бир даһа нүмайиш этдирәчәйик.

Мисаллар. 1. Тутаг ки,

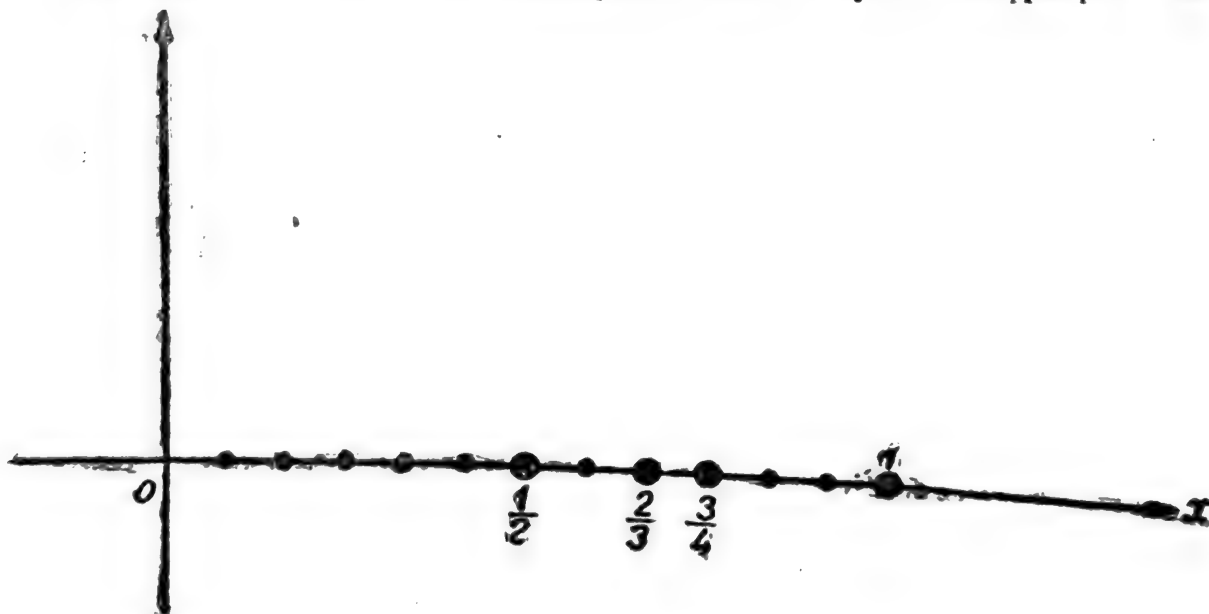
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad (2)$$

ардычыллығы верилмишдир. Бу ардычыллығын үмуми һәдди

$$x_n = \frac{n-1}{n}$$

олачағы айдындыр. Исбат әдәк ки, (2) ардычыллығынын лимити 1-дир. Бунун үчүн габагчадан верилән ихтияри $\epsilon > 0$ әдәди көтүрәк. Көстәрәк ки, верилмиш бу $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә әлә $N > 0$ әдәди вардыр ки, $n > N$ оlanda $|x_n - 1| < \epsilon$ олар.

(2) ардычыллығынын һәдләрини әдәд охуна көчүрмүш ол-



17-чи шәкил

саг, көрәрик ки, бу ардычыллығын һәдләри n -ин артмасы илә 1 әдәдинә сыхлашагдыр (17-чи шәкил). Ихтияри натурал n әдәдинә көрә $\frac{n-1}{n} < 1$ олмасы айдындыр.

(2) ардычыллыгынын лимитинин 1 олдуғуна һәндәси тәсвир васитәсилә һөкүм әтмәк олмаса да, дуя билирик. Лимитин 1-ә бәрабәр олдуғуну гәт'и мүйәйән әтмәк үчүн 1-ин һәр бир кичик әтрафында ардычыллыгын мүйәйән нөмрәдән башлаяраг, бөйүк нөмрәли бүтүн һәдләрин ерләшдирилдийини кәстәрмәлийик. Она көрә дә

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

олдуғуну кәстәрәк.

Лакин:

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Демәли,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

олмалыдыр. Бу бәрабәсизлийи өдәйән натурал n әдәдләринин варлыгыны кәстәрәк. Айдындыр ки, бурада n -ин вә ε -ин мүсбәт олдуғуну нәзәрә алараг юхарыдакы бәрабәрсизлийи

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

шәклиндә яза биләрик.

Белә олдугда N әвәзиндә $\frac{1}{\varepsilon}$ -дан бөйүк натурал әдәди вә я $\frac{1}{\varepsilon}$ —нун там һиссәсини көтүрә биләрик. Бурада N әдәдинин $\frac{1}{\varepsilon}$ -дан вә я ε -дан асылылығы билаваситә көрүнүр.

Тутаг ки, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -дир.

Онда $\frac{1}{\varepsilon} = 100$

олар. $N=100$ көтүрсәк; $n > 100$ олан бүтүн n -ләр үчүн

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$$

олар, йә'ни ваһиддән фәрғи $\frac{1}{100}$ -дән кичик олан ардычыллыг һәдләрин нөмрәләри 100-дән бөйүк олмалыдыр.

Әкәр $\varepsilon = \frac{1}{300}$ көтүрсәк $n > \frac{1}{\varepsilon} = 300$ олмалыдыр.

$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ олмасы үчүн $N=300$ көтүрмәк олар, йә'ни бу

һалда, ваһидлә фәргләри $\frac{1}{300}$ -дән кичик олмасы үчүн ардычыл-
лыг һәдләринин нөмрәләрини 300-дән бөйүк көтүрмәлийик.

Демәли, $\epsilon = \frac{1}{100}$ оlanda $N = 100$,

$\epsilon = \frac{1}{300}$ оlanda $N = 300$

көтүрүлмәлидир. Бу да бир даһа N -ин ϵ -дан асылылығыны
билаваситә кестәрир.

Демәли, габагчадан верилән ихтияри ϵ әдәдинә көрә элә
 $N > 0$ әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

олар, йә'ни $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$,

бурада дәйишән кәмиййәт арта-арта өз лимитинә яхынлашыр.

2. Инди тутаг ки,

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots \quad (3)$$

ардычыллығынын тәк ердә дуран һәдләри ваһид, чүт ердә ду-
ран һәдләри исә сыфырдыр. (3) ардычыллығы лимити олма-
дығыны кестәрәк.

Әксини фәрз әдәк, тутаг ки, (3) ардычыллығынын, лимити
вардыр вә бу лимит һәр һансы бир a әдәдинә бәрабәрдир.

$\epsilon > 0$ габагчадан верилән ихтияри әдәддир вә фәрз әдәк ки,
бу $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә элә $N > 0$ әдәди сечилмишдир ки, $n > N$
олан бүтүн натурал n -ләр үчүн

$$|x_n - a| < \epsilon$$

олур. N -дән бөйүк олан n әдәди чүтдүрсә $x_n = 0$ олар, онда

$$|0 - a| < \epsilon$$

олмалыдыр, бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки әввәлчә $\epsilon = \frac{|a|}{2}$
көтүрсәйдик, тапдығымыз натурал N -дән бөйүк чүт n -ләр үчүн

$$|a| < \frac{|a|}{2}$$

йә'ни $1 < \frac{1}{2}$ олмалы иди, бу да мүмкүн дейилдир. Демәли,

(3) ардычыллығынын лимити йохдур. Сонлу лимити олмаян
һәр бир ардычыллыға дағылан ардычыллыг дейилир.

3. Эйни гайда илә

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$$

ардычыллыгынын да дагылан олдуғуну көстөрө биләрик. Бу ардычыллыгын үмуми һәддинин $x_n = (-1)^{n-1}$ олдуғуну асан-лыгла йохламаг олар. n тәк оlanda $x_n = +1$ вә n чүт оlanda $x_n = -1$ олур.

Енә дә фәрз әдәк ки, (4) ардычыллыгынын лимити вардыр вә бу лимит һәр һансы бир a әдәдинә бәрабәрдир. Онда габагчадан верилән һәр бир $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә элә натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн $|x_n - a| < \epsilon$ олмалыдыр. $\epsilon = \frac{|1 + a|}{2}$ көтүрәк. Онда бу ϵ -на уйғун элә

натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн, о чүмләдән чүт n -ләр үчүн дә

$$|x_n - a| < \frac{|1 + a|}{2}$$

олмалыдыр; йә'ни чүт n -ләр үчүн

$$|-1 - a| < \frac{|1 + a|}{2}$$

олмалыдыр.

$$|-1 - a| = |1 + a| \text{ олдуғундан } |1 + a| < \frac{|1 + a|}{2}$$

олмалыдыр. Бу исә (4) ардычыллыгы лимитинин варлығына даир фәрзийәнин доғру олмадығыны айдын көстәрир.

4. Инди

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots \quad (5)$$

ардычыллыгынын һеч бир сонлу лимитә малик олмадығыны көстәрәк.

Тутаг ки, a әдәди (5) ардычыллыгынын лимитидир. Онда габагчадан верилән һәр бир $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә элә $N > 0$ әдәди вардыр ки, $n > N$ оlanda бүтүн n -ләр үчүн $|n^2 - a| < \epsilon$ олмалыдыр. Айдындыр ки, $a > 0$ -дыр. $\sqrt{a + \epsilon}$ әдәдинин там һиссә-сиви n_0 илә ишарә әдәк. Онда $n_0 + 1 \geq \sqrt{a + \epsilon}$ олар. Инди N вә $n_0 + 1$ әдәдләриндән бөйүк олан там әдәди n_1 илә ишарә әдәк. Айдындыр ки, n_1 -дән бөйүк сонсуз сайда n -ләр вардыр. Белә n -ләр үчүн $n^2 > a + \epsilon$ олачагдыр, йә'ни $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн $n^2 - a > \epsilon$ олачагдыр.

Бу исә фәрзийәмизә зиддир. Демәли (5) ардычыллыгы дагылан ардычыллыгдыр. (5) ардычыллыгынын, габагчадан истәнилән гәдәр бөйүк олан һәр бир $M > 0$ әдәдиндән сонсуз сайда бөйүк һәдләринин олдуғуну көрмәк чәтти дейилдир.

5. Инди исә тутаг ки, $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ -дир. x_n -ин лимити-

нин сыфыр олдуғуну көстөрөк, йә'ни көстөрөк ки,

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

ардычыллығынын лимити сыфырдыр. Бурада дәйишән кәмий-йәт өз лимитинә әһтизаз әдә-әдә яхынлашыр. n тәк әдәд ол-дугда дәйишән x_n кәмиййәтинин гиймәти мүсбәт, чүт олдугда исә мәнфидир, йә'ни дәйишмә просесиндә x_n каһ өз лимитин-дән бөйүк каһ да кичик олур.

6. Верилмиш a сабит кәмиййәтинин лимитини тапаг.

Юхарыда гейд этдийимизә керә һәр бир сабит кәмиййәтә гиймәтләри өзүнә бәрабәр олан дәйишән кәмиййәт кими баха биләрик. Она керә дә $x_n = a$, $n = 1, 2, \dots$ шәклиндә язсаг

$$a, a, a, \dots, a, \dots$$

ардычыллығыны әлдә әдәрик. Исбат әдәк ки, бу ардычыллы-ғын лимити a -дыр. Доғрудан да, габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ϵ әдәдинә керә бүтүн натурал n -ләр үчүн

$$|x_n - a| < \epsilon$$

олар, чүнки

$$|a - a| = 0 < \epsilon.$$

Демәли сабит кәмиййәтин лимити өзүнә бәрабәрдыр.

7. Варлыг областы $0 \leq x \leq 2$ олан $f(x) = x^2$ функциясынын x дәйишәни 1-ә яхынлашдыгда лимитини тапаг. Исбат әдәк ки, бу лимит 1-дир. Тутаг ки, $\epsilon > 0$ габагчадан верилән һәр һансы әдәддир. δ -ны сечәк. Айдындыр ки, әкәр ваһид x^2 функциясынын $x \rightarrow 1$ -да лимитидирсә $|x^2 - 1| < \epsilon$ олмалыдыр, йә'ни $|x+1| \cdot |x-1| < \epsilon$ олмалыдыр. Бурадан

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{|1 + x|}$$

аларыг. $0 \leq x \leq 2$ олдуғундан $1 \leq 1 + x \leq 3$ олар. Онда $|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$

көтүрәк вә $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ сечәк.

Айдындыр ки, $|x - 1| < \delta$ олдугда, $0 \leq x \leq 2$ олдуғу үчүн

$$|x^2 - 1| = (x + 1) |x - 1| \leq 3|x - 1| < 3\delta = \epsilon$$

олар.

$$\text{Демәли} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1;$$

бурада δ -нын ϵ -дан асылылығы айдын көрүнүр.

8. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функциясынын $x \rightarrow \infty$ -да лимитини тапаг.

Исбат эдэк ки, бу лимит сыфырдыр. Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ эдэди гейд эдилмиш ихтияри эдэддир.

$$\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

шэртини өдэйэн x -лэри тапаг. Йэ'ни бурада $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ олмалы-

дыр. Башга сөзлэ, $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ олмалыдыр. Мүтлэг

гиймэти $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ -дэн бөйүк олан бир x_0 көтүрэк, мәсэлэн тутар

ки, $|x_0| = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$ олсун. Айдындыр ки, $|x| > |x_0|$ олан бүтүн

x -лэр үчүн $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$ олачагдыр.

Онда

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

олмалыдыр. Демэли, элэ x_0 тапдыг ки, x -ин x_0 гиймэтиндэн башлаяраг сонра кэлэн бүтүн x -лэр үчүн, йэ'ни $|x| \geq |x_0|$ бэрабэрсиззийни өдэйэн бүтүн x -лэр үчүн

$$\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

бэрабэрсиззийн өдэнилэчэкдир. Бу исэ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

олдуғуну сүбүт эдир.

9. Гейд этмэк лазымдыр ки, интуисия эсасэн күман эдилэн лимит, кэмиййэтин һэгиги лимитинин эйни олмая да билэр. Мәсэлэн, тутар ки, узунлуғу a олан бир дүз хэтт парчасы n бэрабэр һиссэйэ бөлүмүшдүр. Ахырынчы CB парчасы мүс-тәсна олмага һәр бир һиссәни диаметр һесап эдиб 18-чи шәкилдәки кими ярым чеврәләр чәкәк (1-чи шәклә бахын, шәкилдә AB парчасы 5 бэрабэр ерә бөлүмүшдүр).

Бу ярымчеврәләр бирликдә бир учу A нөгтәсиндә, диқәр учу C нөгтәсиндә олан дилғавари кәсилмәз хәтдән ибарәт олур. Инди бөлкү нөгтәләринин сайыны артыраг вә һәр дәфә AB парчасынын ени алынган һиссәләри үзәриндә, ахырынчы

бөлкү мүстәсна олмагла, ярым чеврэләр гураг. Бу артырманы һүдудсуз олараг давам этдирәк, йә'ни n -и сонсузлуға яхынлашдыраг ($n \rightarrow \infty$). Белә олдуғда C нөгтәси B нөгтәсинә, далғавари хәтт исә AB дүз хәтт парчасына һүдудсуз олараг яхынлашыр. Бурада далғавари хәттин узунлуғунун, лимитинин AB пачасынын узунлуғу олан a әдәдинә бәрәбәр олдуғуна һөкм әдә биләрикми?



18-чи шәкил

Бу мәсәләни һәлл әдәк. Шәртә көрә узунлуғу a олан AB парчасы n бәрәбәр һиссәйә бөлүнмүшдүр. Онда, һәр һиссәнин узунлуғу $\frac{a}{n}$ олачагдыр. Бу һиссәләрин һәр бири диаметр олдуғундан чәкилән чеврәләрин радиуслары $\frac{a}{2n}$ -ә бәрәбәр олмалыдыр. Онда һәр бир ярымчеврәнин узунлуғу $\frac{\pi \cdot a}{2n}$ олачагдыр. Белә ярымчеврәләрдән $(n-1)$ гәдәр олдуғундан, буларын топланмасындан әмәлә кәлән далғавари хәттин узунлуғу $(n-1) \frac{\pi a}{2n}$ олачагдыр.

Инди $n \rightarrow \infty$ -да бу ифадәнин лимитини тапаг. Һәмин кәмийәттин алдығы гиймәтләрини ардычыллыг шәклиндә язаг. $n=2$ оlanda, йә'ни AB ики ерә бөлүндүкдә шәртә көрә AB үзәриндә бир дәнә ярымчеврә олачагдыр. Онда һәмин ярымчеврәнин узунлуғу

$$(n-1) \frac{\pi a}{2n} = (2-1) \frac{\pi a}{4} = \frac{\pi a}{4}$$

олачагдыр. $n=3$ оlanda, AB парча 3 бәрәбәр һиссәйә бөлүнәчәк, ярымчеврәләр исә ики дәнә олачагдыр. Онда алыннан далғавари хәттин узунлуғу $(n-1) \frac{\pi a}{2n} = (3-1) \frac{\pi a}{2 \cdot 3} = \frac{\pi a}{3}$ олачагдыр. $n=4$ оlanda исә шәкилдә шәртә көрә 3 дәнә ярымчеврә көтүрмәлийик, бу чеврәләрдән алыннан далғавари хәттин узунлуғу

$$(4-1) \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 4} = 3 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 4}$$

әдәдинә бәрәбәр олачагдыр. Бу гайда илә давам әтсәк

$$1 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 2}, 2 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 3}, 3 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 4}, \dots, (n-1) \frac{\pi a}{2n} \dots$$

ардычыллыгыны аларыг. Инди исбат эдэк ки, бу ардычыллыгыны лимити $\frac{\pi a}{2}$ -дир.

Бунун үчүн габагчадан верилэн һәр бир мүсбәт ϵ әдәдинә көрә әлә бир натурал N әдәди сечәк ки, $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн

$$\left| (n-1) \frac{\pi a}{2n} - \frac{\pi a}{2} \right| < \epsilon$$

олсун.

Бурада

$$(n-1) \frac{\pi a}{2n} = \frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a}{2n}$$

шәклиндә языла билдийиндән,

$$(n-1) \frac{\pi a}{2n} - \frac{\pi a}{2} = -\frac{\pi a}{2n}$$

олачагдыр.

Демәли

$$\left| -\frac{\pi a}{2n} \right| < \epsilon$$

бәрабәрсизлийини тә'мин әдән n -ләри ϵ -а көрә сечмәлийик. Онда

$$\frac{\pi a}{2n} < \epsilon$$

олмалыдыр. Бу бәрабәрсизлийин һәр ики тәрафини мүсбәт ϵ әдәдинә бөлүб, n -ә вурсаг

$$n > \frac{\pi a}{2\epsilon}$$

бәрабәрсизлийини аларыг.

$\frac{\pi a}{2\epsilon}$ әдәдинин (π , a , ϵ мә'лум әдәдләрдир!) там һиссәсини N илә көстәрәк. (Демәк N әдәди ϵ -дан асылыдыр!)

Белә олдугда N -дән бөйүк бүтүн n -ләр үчүн, йә'ни $n > N$ үчүн

$$\frac{\pi a}{2n} < \epsilon,$$

вә я

$$\left| (n-1) \frac{\pi a}{2n} - \frac{\pi a}{2} \right| < \epsilon$$

олачагдыр. Башга сөzlә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\pi a}{2n} = \frac{\pi a}{2}$$

олачагдыр.

Демэк $n \rightarrow \infty$ -да далғавари хэттин узунлуғу AB парчасынын узунлуғуна (a) дейил, $\frac{\pi a}{2} \simeq 1,57a$ әдәдинә бәрабәр олур.

Һалбуки, интуисияя истинад әдиб нәтичә чыхарсайдыг, дейәрдик ки, далғавари хэттин узунлуғу мүййән бөлкүдән башлаяраг AB парчасынын узунлуғуна, йә'ни „ a “-я чох яхын олачагдыр. Кәмиййәтин лимитинә верилән дүзкүн тә'рифә истинад этдикдә исә бу лимитин a -дан тәхминән 1,57 дәфә бөйүк олдуғуну мүййән этдик. Демәли кәмиййәтин мүййән бир әдәдә яхынлашдығыны садәчә һисс әтмәк аздыр, бурада кәмиййәтин һәмин лимитә яхынлашмасынын сүр'әтини дә дүзкүн мүййән әтмәк лазымдыр.

Дәйишән кәмиййәтин мүййән әдәдә яхынлашмасында онун яхынлашма сүр'әтинин бөйүк ролу вардыр.

§ 8. СОНСУЗ КИЧИЛӘН ВӘ СОНСУЗ БӨЙҮЙӘН КӘМИЙЙӘТЛӘР ҺАГГЫНДА

Сонсуз кичилән кәмиййәтләр. Биз сыфра йығылан ардычыллыг (§ 6, (1) ардычыллыгы) тәшкил әдән дәйишән кәмиййәтдән бәһс этдик. Белә дәйишән кәмиййәтләр олдуғча чохдур. Бу дәйишән кәмиййәтләрин тәшкил әтдийи ардычыллыгларын сыфра йығылмасы вә я лимитләринин сыфыр олмасы хассәси онлары бир синифдә бирләшдирән әсас чәһәтдир.

Тә'риф. Лимити сыфра бәрабәр олан кәмиййәтләрә *сонсуз кичилән кәмиййәтләр* дейилир.

Башга сөzlә десәк, мүтләг гиймәти мүййән ердән башлаяраг габагчадан верилән һәр бир $\epsilon > 0$ әдәдиндән кичик олан вә кичилмәкдә давам әдән дәйишән кәмиййәтә *сонсуз кичилән кәмиййәт* дейилир. Белә олдуғда, ихтияри $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә һәмишә элә натурал $N > 0$ олан әдәди тапмаг олар ки, $n > N$ олмагла бүтүн n -ләр үчүн дәйишән x_n ($n = 1, 2, \dots$) кәмиййәтинин алдығы x_n гиймәтиндән сонра кәлән бүтүн x_n гиймәтләри үчүн

$$|x_n - 0| = |x_n| < \epsilon$$

бәрабәрсизликләри өдәниләчәкдир.

Тә'рифдән айдындыр ки, лимити мүййән a әдәди олан ардычыллыгын һәдләри илә a әдәди арасындакы фәрг, $\alpha_n = x_n - a$ сонсуз кичилән кәмиййәтдир. Доғрудан да, бу һалда, лимитин тә'рифинә көрә габагчадан верилән һәр бир $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә элә бир натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ оlanda

$$|x_n| = |x_n - a| < \epsilon$$

олар. Демәли, $\alpha_n = x_n - a$ сонсуз кичилән кәмиййәтдир. Бурадан $x_n = a + \alpha_n$ олар, йә'ни лимити a -я бәрабәр олан x_n ($n = 1, 2, \dots$) дәйишән кәмиййәтини $x_n = a + \alpha_n$ шәклиндә көстәрә биләрик. Бурада α_n мүййән сонсуз кичилән кәмиййәтдир.

Төгснө, эхэр дэйишэн x_n ($n = 1, 2, \dots$) кэмиййэти $x_n = a + \alpha_n$ шэклиндэдирсэ, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ олар. Бурада α_n верилмиш

сонсуз кичилэн кэмиййэтдир. Доғрудан да, α_n сонсуз кичилэн кэмиййэт олдуғундан габагчадан верилэн һэр бир мүсбэт ϵ эдэдинэ көрө элэ $N > 0$ эдэди тапмаг олар ки, $n > N$ оlanda $|\alpha_n| < \epsilon$ олар. Шэртэ көрө $\alpha_n = x_n - a$ -дыр. Демэли, $n > N$ оlanda $|x_n - a| < \epsilon$ олар.

Она көрө, x_n ($n = 1, 2, \dots$) кэмиййэтинин лимити a -дыр, йә'ни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Мисаллар. Гиймэтлэри $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ гануну илэ дэйишэн бир кэмиййэт көтүрэк. Бурада натурал n эдэди тэк оlanda $(-1)^n = -1$ олдуғу үчүн, $x_n = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ олур. n чүт оlanda исэ $(-1)^n = 1$ олдуғу үчүн, $x_n = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n}$ олур.

Белэликлэ,

$$1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \dots$$

ардычыллыгыны элдэ этмиш олуруг. Бу ардычыллыгын лимитинин сыфыр оллуғуну көстэрэк.

Тутаг ки, $\epsilon > 0$ габагчадан верилэн вэ истәнилэн гэдэр кичик эдэддир. Айдындыр ки, бүтүн n -лэр үчүн

$$|x_n| \leq \frac{3}{n}$$

олур. $|x_n| < \epsilon$ бәрабәрсизликләрини өдәйән n -и тапаг. Бунун үчүн $\frac{3}{n} < \epsilon$ бәрабәрсизлийини көтүрэк. Һәммин бәрабәрсизлийин һэр тәрәфини натурал n эдэдинэ вуруб ϵ -на бөлсәк

$$n > \frac{3}{\epsilon}$$

аларыг.

$\frac{3}{\epsilon}$ эдэдинин там һиссәсини N илэ ишарә этсәк, онда $|x_n| < \epsilon$ олар. Демэли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Бу мисалын сәчиййәви тәрәфи ондадыр ки, бурада дэйишән кэмиййэт нөвбә илэ өз лимити олан сыфра каһ яхынлашыр, каһ да узаглашыр. Эхэр бу йолла гиймэтлэри

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

гануну илэ дэйишэн кэмиййэти нэзэрдэн кечирмиш олсаг, көрәрик ки, һәр бир $\epsilon > 0$ эдәдинә көрә һәмишә элэ N вардыр ки, $n > N$ оlanda $|x_n| < \frac{2}{n} < \epsilon$ олар. Онун үчүн N -и $\frac{2}{\epsilon}$ эдә-

динин там һиссәсинә бәрабәр көтүрмәк кифайәтдир. Бу дэйишән кэмиййәтин хусуслийи ондадыр ки, n эдәди тәк оlanda $x_n = 0$, n эдәди чүт олдугда исә $x_n = \frac{2}{n}$ олур. Демәли, нэзәр-

дән кечирдийимиз дэйишән кэмиййәтин тәк ердә дуран һәдләри һәмин дэйишән кэмиййәтин лимитинә бәрабәр олур. Арашдырдығымыз мисалларда дэйишән кэмиййәтин өз лимитинә мүхтәлиф гайда илэ яхынлашдығыны көрдүк. Дэйишән кэмиййәт каһ азала-азала, каһ да арта-арта, каһ өз лимит гиймәтини ала-ала, каһ да лимит гиймәтиндән һәм узаглашыб, һәм дә яхынлашмагла, әһтизаз эдәрәк, өз лимитинә яхынлашыр. Кэмиййәтләрин бу чохчәһәтли тәбиәти онларын практика үчүн, мәишәт үчүн сон дәрәчә ярарлы олдуғуна чанлы мисалдыр.

Сонсуз бөйүйән кэмиййәтләр. § 7-дә (5) ардычыллығындан данышаркән бу ардычыллығын габагчадан верилән һәр бир мүсбәт бөйүк эдәди мүтләг гиймәтчә ашан сонсуз сайда һәдләри олдуғу гәнаәтини һасил этдик. Гиймәтләри һәмин хас-сәйә малик олан дэйишән кэмиййәтләр чохдур. Бу чүр кэмиййәтләри бир синфә йыған, онлары бирләшдирән үмуми чәһәт ондан ибарәтдир ки, бу дэйишән кэмиййәтин мүтләг гиймәтләриндән дүзәлән ардычыллыгларын һәдләринин дурдуглары ерин нөмрәси артдыгча һәдләринин гиймәти дә гейри-мәһдуд артыр. Бунун даһа дәгиг олан ашағыдакы тә'рифини верәк.

Тә'риф. Әкәр габагчадан верилән һәр бир бөйүк мүсбәт M эдәдинә көрә элэ натурал N эдәди сечмәк мүмкүндүрсә вә бу һалда $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн $|x_n| > M$ оларса, онда x_n дэйишән кэмиййәтинә *сонсуз бөйүйән кэмиййәт* дейилир вә $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ вә я $x_n \rightarrow \infty$ шәклиндә көстәрилиз.

Бу дэйишән кэмиййәт өз дэйишмә просесиндә мүәййән гиймәтдән башлаяраг мүсбәт гиймәтләр аларса, ону $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ илэ, мәнфи гиймәтләр алдыгда исә $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ илэ ишарә эдилер.

Мисаллар. 1. $x_n = n^2$.

Бу һалда, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ олар.

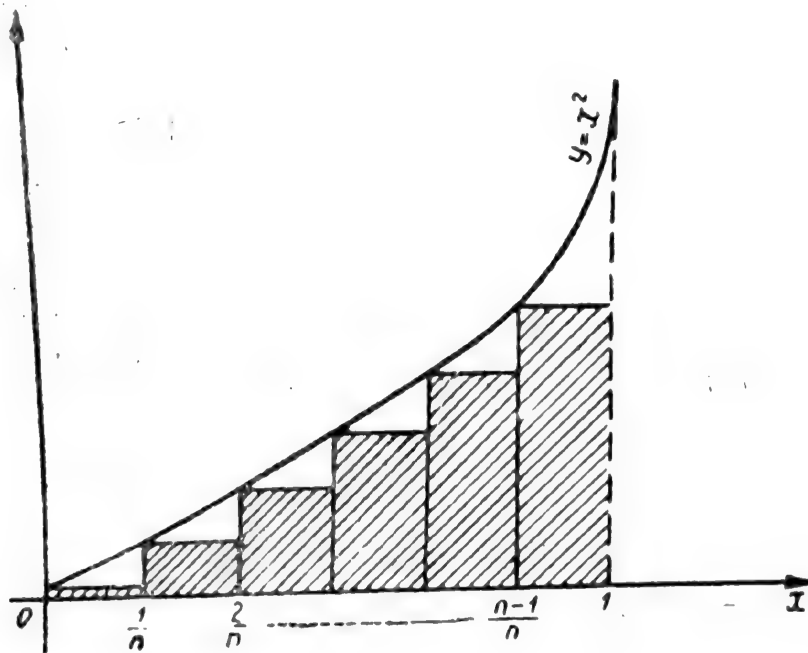
2. $x_n = -n^3$

Бу һалда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3) = -\infty$ олачагдыр.

Әкәр x_n сонсуз азалан кәмийәтдирсә, онда $\frac{1}{x_n}$ сонсуз бөйү-

йәндир вә тәрсинә (йохлайын).

Лимитләр үсулу, юхарыда гейд этдийимиз кими, һәндәсә вә чәбр үсулу илә һәлл олунмаян бә'зи мәсәләләрин һәллиндә мүнәффәгийәтлә тәтбиг әдилир. $y=x^2$ параболу, x оху вә $x=1$ дүз хәтти арасында галан сәһәнин тапылмасы фикримизин доғрулуғуну көстәрән мисаллардан биридир. Көстәрилән хәтләрлә әһәтә олунан сәһәни шәкилдә көстәрәк. Она көрә дә



19-чу шәкил

ХОУ дүзбучаглы координат системини көтүрәк (19-чу шәклә бах) вә $y=x^2$, $x=1$ хәтләрини чәкәк.

$[0,1]$ парчасыны $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ нөгтәләри

илә n бәрабәр һиссәйә айыраг. Бу нөгтәләрин һәр бириндән $y=x^2$ параболуну кәсәнә гәдәр перпендикулярлар галдыраг.

Алынан парчаларын үзәриндә сол юхары бучағы парабол үзәриндә олан дүзбучаглылар гураг. Бу дүзбучаглылар шәкилдә гараланмышдыр. Һәмин дүзбучаглыларын сәһәләрини һесаб-

лаяг. Отурачагларынын узунлуғу $\frac{1}{n}$ олан бу дүзбучаглыла-

рын һүндүрлүкләрини тапмаг үчүн алынан парчаларын сол учларынын абсиссләрини $y=x^2$ ифадәсиндә x -ин еринә язмаг

лазымдыр. Она көрә дә, биринчи дүзбучаглынын сәһәси, $0 \cdot \frac{1}{n}$; икинчи дүзбучаглынын сәһәси $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$; үчүнчү дүз-

бугагынын сәһәси $\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ вә и. а.; ахырынчы дүзбугагынын сәһәси $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ олачагдыр. Бу сәһәләри топласаг гараланмыш пилләвари фигурун сәһәсини әлдә әдәрик. Пилләвари фигурун сәһәсини S_n илә ишарә әдәрәк.

$$S_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

аларыг. Бурадан $\frac{1}{n}$ вуруғуну мө'тәризә харичинә чыхарыб галан ифадәни ортаг мәхрәчә кәтирсәк

$$S_n = \frac{1^2 \cdot 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}$$

ифадәсини әлдә әдирик. Айдындыр ки, пилләвари фигурун сәһәси үчүн тапдығымыз бу гиймәт $y=x^2$ параболу, ox оху вә $x=1$ дүз хәтти илә әһатә олуан фигурун һәгиги сәһәсиндән кичикдир. Лакин бөлкү нөгтәләринин сайыны артырмагла бу ики сәһә арасындакы фәргин кичилдийини көрмәк чәтин дейилдир.

Иянди $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$ чәмини һесаблаяг.

Бу чәми σ_n илә ишарә әдәк:

$$\sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2.$$

Она көрә дә,

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

әйнилийини язаг вә k әдәдинә $1, 2, \dots, n-1$ гиймәтләри вериб алынан

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$(n-1+1)^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топлаяг. Айдындыр ки, сол тәрәфдә әйни гүввәтләрин һамысы ислаһ олуначагдыр; сағда исә ортаг вуруглары мө'тәризә харичинә чыхарсаг

$$n^3 - 1 = 3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + 3(1 + 2 + \dots + n-1) + (n-1)$$

аларыг, чүнки сағда 1 әдәди $(n-1)$ дәфә өз-өзү илә топланмалыдыр. Ашкардыр ки,

$$1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Белә олдугда σ_n чәминә көрә

$$n^3 - 1 = 3\sigma_n + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)$$

бир дэрэчэли бир мачллулу тэнлик элдэ этмиш олуруг. Бу тэнлийи хэлл эдирик:

$$\begin{aligned} 3\sigma_n &= (n^3 - 1) - \frac{3n(n-1)}{2} - (n-1) = \\ &= \frac{2(n^3 - 1) - 3n(n-1) - 2(n-1)}{2} = \\ &= \frac{(n-1)(2n^2 + 2n + 2 - 3n - 2)}{2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Бурадан

$$\sigma_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

олур. Белэиклэ,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{6}$$

формулуну элдэ эдирик.

Онда пиллэвари фигурун сахэси

$$S_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

вэ я

$$S_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

олур. Бу ифадэни

$$S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

шэклиндэ язаг. Саг тэрэфдэки ифадэни ачсаг

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}\right)$$

олдуғуну көрөрик.

$$\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} = \alpha_n$$

илэ ишарэ эдэк. Айдындыр ки, $n \rightarrow \infty$ шэртилэ α_n кэмийэтти сыфра яхынлашыр. Демэли, α_n сонсуз кичилэн кэмийэтдир. Дикэр тэрэфдэн

$$S_n = \frac{1}{3} + \alpha_n$$

олур. Юхарыда гейд этдийимиз хассэйэ эсасэн бир кэмийэт сонунчу шэкилдэ ифадэ эдилмишдирсэ онда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

олдуғуну һекм эдә биләрик. Демәли, ахтардығымыз фигурун саһәси, тәрәфи 1-ә бәрәбәр олан квадратын саһәсинин үчдә биринә бәрәбәрдир.

§ 9. АЗАЛАН ҺӘНДӘСИ СИЛСИЛӘ

Бир сыра мәселәләрин һәллиндә азалан һәндәси силсиләнин лимитини тә'йин этмәк لازым кәлир. Белә ардычыллыглары бир арая йығыб, онларын лимитини тә'йин эдәк.

Тутаг ки, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
ортаг вуруғу q олан азалан һәндәси силсиләдир ($|q| < 1$). Айдындыр ки, һәммин ардычыллығын үмуми һәдди

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

формулу илә тә'йин эдиләчәкдир. Ардычыллығын хусуси чәмләрн исә үмуми һәдди

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

олан бир ардычыллыг әмәлә кәтирәчәкдир. Азалан һәндәси *силсиләнин чәми*, онун хусуси чәмләриндән дүзәлән ардычыллығын лимитинә дейилир. Бу лимитин $\frac{a_1}{1-q}$ -ә бәрәбәр олдуғуну исбат эдәк. Мә'лум олдуғуна көрә:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1 - q}$$

Бу ифадәни белә яза биләрик:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q}$$

Бурадан

$$\left| S_n - \frac{a_1}{1-q} \right| = \left| \frac{a_1}{1-q} \right| |q|^n$$

алынар. Һәммин бәрәбәрлийин сағ тәрәфиндә дуран ифадәнин коэффисienti n -дән асылы дейилдир. $|q| < 1$ олдуғундан сағ тәрәф n -ин гейри-мәһдуд артмасы илә азгылыб сыфра яхынлашыр. Она көрә дә элә $N > 0$ тапмаг олар ки, сағ тәрәф $n > N$ олдугда габагчадан берилән ихтияри $\epsilon > 0$ әдәдиндән кичик эдилә биләр.

Демәли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Башга сөзлә, азалан һәндәси силсиләнин лимити, сурәти биринчи һәддә вә мәхрәчи ваһидлә ортаг вуруғун фәргинә бәрәбәр олан бир кәсрдир.

Мисаллар. Берилән $\alpha = 0.5555 \dots$ дөври онлуг кәсри, ади кәсрә чевирәк.

Айдындыр ки,

$$\alpha = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots$$

шәклиндә языла биләр. Бу ифадә, биринчи һәдди $\frac{5}{10}$ вә ортаг вуруғу $\frac{1}{10}$ олан азалан һәндәси силсиләдир. Она көрә дә

$$\alpha = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

олар, йә'ни

$$0,555 \dots = \frac{5}{9} \text{ олар.}$$

Инди исә

$$\alpha = 0,999 \dots$$

дөври онлуг кәсрини ади кәсрә чевирәк.

$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

олдуғундан бу чәмә биринчи һәдди $\frac{9}{10}$, ортаг вуруғу $\frac{1}{10}$ олан азалан һәндәси силсиләвин хусуси чәмләринин лимити кими ба-
ха биләрик.

Она көрә дә

$$\alpha = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{9} = 1$$

олар. Демәли,

$$0,999 \dots = 1.$$

Бурадан белә бир нәтичә дә әлдә әдә биләрик:

$$\alpha = 0,272$$

вә

$$\beta = 0,271999 \dots$$

дөври онлуг кәсрләри эйни ади кәсри ифадә әдир.

Доғрудан да,

$$\begin{aligned} \beta &= 0,271 + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \dots = \\ &= 0,271 + \frac{1}{1000} \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots \right) = 0,271 + \frac{1}{1000} = 0,272. \end{aligned}$$

Башга сөзлә эйни бир рационал әдәдә ялныз бир онлуг кәср дейил бир нечәси уйғун кәлир.

Бу дейилэнлэри үмумилэшдирэрэк китабын биринчи хиссә-синдә исбатыны тәхирә салдығымыз үмуми тәклифи исбат әдәк: бүтүн дәври кәсрләр расионал әдәдләрdir.

Тутаг ки,

$$r = 0, a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots$$

ифадәси дәври онлуг кәсрин үмуми шәклидир. Бурада $a_1 a_2 \dots a_m$ дәври кәсрин тәкрат әтмәйән онлуг ишарәләри групу, $b_1 b_2 \dots b_n$ исә тәкрат әдән онлуг ишарәләри группудур. Бу онлуг дәври кәсри

$$S = 0, b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

илә ишарә әдәк. Бурада $b_1 b_2 \dots b_n$ дәврдә иштирак әдән онлуг ишарәләр группудур. Бу һалда белә яза биләрик:

$$r = 0, a_1 a_2 \dots a_m + \frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \dots + \frac{b_n}{10^{m+n}} +$$

$$+ \frac{b_1}{10^{m+n+1}} + \frac{b_2}{10^{m+n+2}} + \dots + \frac{b_n}{10^{m+2n}} + \dots$$

вә я

$$r = 0, a_1 a_2 \dots a_m + \frac{1}{10^m} \left[\left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{10^n} \left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \right) + \dots \left. \right] = 0, a_1 a_2 \dots$$

$$\dots a_m + \frac{1}{10^m} \left[S + \frac{1}{10^n} \cdot S + \frac{1}{10^{2n}} \cdot S + \dots \right].$$

Азалан сонсуз һәндәси силсиләнин чәминин формулуна көрә:

$$1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{10^n}{10^n - 1}.$$

Демәли,

$$r = 0, a_1 a_2 \dots a_m + \frac{S}{10^m} \cdot \frac{10^n}{10^n - 1}.$$

Һәмин ифадәнин сағ тәрәфини ортаг мәхрәчә кәтирмәклә $\frac{p}{q}$ шәклинә дүшәчәйини йәгин әтмәк чәтин олмаз.

§ 10. МОНОТОН АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР

Кәмийәтин лимитинин тапылмасы мәсәләсиндә әввәлчәдән бу кәмийәтин лимитинин варлығыны билмәк дә чох әһәми-йәтли мәсәләдир.

Кәмийәтин лимитини габагчадан мүйәйән әдән бир нечә әламәт вардыр. Бу әламәтләрден бири § 12-дә көстәрилә-

чәкдир. Лакин элә ардычыллыглар вардыр ки, онларын лимитинин варлыгыны ашағыдакы принципларин көмәйи илә мүйәйән этмәк олар.

Белә ардычыллыглардан монотон ардычыллыгы көстәрә биләрик.

Тә'риф. Һәдләри $a_{n+1} > a_n$ бәрабәрсизлийини өдәйән ардычыллыглара *монотон артан ардычыллыг*, һәдләри $a_n > a_{n+1}$ бәрабәрсизлийини өдәйән ардычыллыглара исә *монотон азалан ардычыллыг* дейилир.

Мисаллар. $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

ардычыллыгы монотон артандыр.

Доғрудан да, бурада

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

олдуғундан

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

олур. Бу ифадәнин сағ тәрәфи бүтүн натурал n -ләрә көрә мүсбәт олдуғундан

$$a_{n+1} > a_n$$

олачагдыр, йә'ни верилмиш ардычыллыгын бүтүн һәдләри

$$a_{n+1} > a_n$$

мүнасибәтивә табедир.

Демәли, бу ардычыллыг монотон артандыр.

2. $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

ардычыллыгы исә монотон азаландыр. Доғрудан да, бурада

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

олдуғу үчүн айдындыр ки, $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, чүнки сурәтләри бәра-

бәр олан кәсрләрдән мәхрәчи бөйүк олан кәср кичикдир. Демәли, $a_{n+1} < a_n$ олур. Башга сөзлә, верилән ардычыллыг монотон азалан ардычыллыгдыр.

Монотон артан вә азалан ардычыллыга бирликдә *монотон ардычыллыг* дейилир.

Һәр бир монотон ардычыллыгын йығылдығыны һөкм этмәк мүмкүн дейилдир. Мәсәлән,

$$1, 2, 3, \dots n, \dots$$

натурал әдәдләр ардычыллыгы монотон артандыр, йығылан дейилдир. Лакин монотон артан ардычыллыгы юхарыдан мәһдудурса, йә'ни ардычыллыгын бүтүн һәдләри мүййән бир V әдәдиндән кичикдирсә, онда белә бир ардычыллыгын V -дән бөйүк олмаян лимитә малик олмасына зегһән дә олса, инанмаға әсасымыз вардыр. Верилмиш ардычыллыгын бүтүн һәдләри мүййән бир V әдәдиндән бөйүк оларса, онда белә ардычыллыға *ашағыдан мәһдуд ардычыллыг* дейилир. Ашағыдан мәһдуд монотон азалан ардычыллыгын лимитинин V -дән кичик олмаячагына инана биләрик.

Бу әламәтләре *монотон ардычыллыглар принципи* дейирләр. Һәмин принципә керә, юхарыдан мәһдуд олан һәр бир монотон артан ардычыллыгын лимити вардыр. Әләчә дә, ашағыдан мәһдуд олан һәр бир монотон азалан ардычыллыгын лимити вардыр.

Монотон ардычыллыглар принципинин интуитив олмасына вә инкар әдилмәз бир һәгигәтә бәнзәмәсинә бахмаяраг, онун чидди риязи исбатына әһтияч вардыр.

Тутаг ки,

$$a_1 \ a_2 \dots a_n \dots \quad (1)$$

монотон артан мәһдуд әдәдләр ардычыллыгыдыр. Һәмин ардычыллыгда бу әдәдләри сонсуз онлуг кәсрләрлә ифадә әдәк:

$$a_1 = p_0^{(1)}, p_1^{(1)} p_2^{(1)} \dots p_n^{(1)} \dots$$

$$a_2 = p_0^{(2)}, p_1^{(2)} p_2^{(2)} \dots p_n^{(2)} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_k = p_0^{(k)}, p_1^{(k)} p_2^{(k)} \dots p_n^{(k)} \dots$$

бурада

$$p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)}, \dots, p_0^{(k)}, \dots$$

мәһдуд там әдәдләр ардычыллыгыдыр. Бу ардычыллыг монотон артан вә мәһдуд олдуғундан онун һәдләри k -нын артмасы илә гейри-мәһдуд арта билмәз. Әлә бир N_0 нөмрәси вардыр ки, бу нөмрәли һәддән сонра кәлән ($k \geq N_0$) ардычыллыгын һәдләри өзләринин ән бөйүк гиймәтинин алачаг вә бу гиймәт ардычыллыгын һәдләринин нөмрәси ($k \geq N_0$) дәйишдикчә дәйишмәйәчәкдир. Һәмин сабит әдәди (ардычыллыгын өз һәддидир) a_0 илә ишарә әдәк.

Инди веркүлдән сонра биринчи сүтунда дуран әдәдләр ардычыллыгыны нәзәрдән кечирәк:

$$p_1^{(1)} p_1^{(2)} \dots p_1^{(k)} \dots$$

үмүмийтлө $n, k = 1, 2, \dots$ олдугда $p_n^{(k)}$ онлуг ишарэлери 0-дан 9-а кими натурал гиймэтлэр алыр.

Нөмрөси N_0 -дан сонра кэлэн ардычыллыгын һэдлэрини нэзэрдэн кечирэк ($k \geq N_0$). Тутаг ки, α_1 һәмич ардычыллыгын, нөмрөси N_0 -дан сонра кэлэн һэдлэри ичәрисиндә биринчи тәсадүф әдилән вә нөмрөси N_1 олан ән бөйүк һәддидир ($N_1 \geq N_0$ олачагы айдындыр). α_1 -ә биринчи дәфә тәсадүф әтдикдән сонра һәр дәфә тәкрар әдәчәкдир. Әкәр бу ардычыллыгын сонра кэлэн һэдлэри азалсайды онда һәмич һэдлэрин нөмрэлэри N_0 -дан бөйүк олдуғундан $a_{N_0+1}, a_{N_0+2}, \dots$ сабит олдуғу үчүн әсас ардычыллыгыг монотон артан олмазды.

Инди онлуг кәсрлэрин икинчи сүтунунун һэдлэриндән дүзәлмиш

$$p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \dots, p_2^{(k)}, \dots$$

ардычыллыгыны нэзэрдән кечирэк. Нөмрөси N -дән бөйүк олан һэдлэри нэзэрдән кечирсәк көрәрик ки, мүййән N_2 нөмрөсиндән ($N_2 \geq N_1 \geq N_0$) сонра кэлэн һэдләр һәр һансы натурал α_2 әдәдинә бәрабәр олачагдыр. Бу гайда илә галан сүтунлардан дүзәлән ардычыллыгларын лимитлэрини, $\alpha_3, \alpha_4, \dots$ әдәллэрини вә уйғун N_3, N_4 вә и. а. нөмрэлэрини тә'йин әдә биләрик. Алынан әдәди язаг:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

Бу әдәдин (1) ардычыллыгынын лимити олдуғуну исбат әдәк.

Тутаг ки, $\epsilon > 0$ габагчадан верилән әдәддир. $\frac{1}{10^m} \leq \epsilon$ -у өдә-

йән m -и тапаг. Айдындыр ки, $n > N_m$ олан бүтүн α_n һэдлэрини там вә биринчи m онлуг ишарэлери $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ әдәдинин там вә уйғун онлуг ишарэлери илә әйни олачагдыр. Она көрә дә $n \geq N_m$ олдугда

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{10^m} < \epsilon$$

олачагдыр, йә'ни (1) монотон артан ардычыллыгы мүййән α һәгиги әдәдинә йығылыр.

Монотон ардычыллыглар принципндән истифадә әдиб, чохлу әдәдләр тә'йин әтмәк олар. Бунлардан бир нечәси риязийятда тутдуғу мөвгеләринә көрә чох әһәмийәтлидир.

1. e әдәди (эйлер әдәди)

Биринчи n натурал әдәдлэрин һасилини $n!$ илә көстәрәк (n факториал):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Үмүми һәдди

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

гануну илэ тэ'йин эдилэн ардычыллыгы нэзэрдэн кечирэк. Ашкардыр ки, бу ардычыллыг монотон артандыр, чүнки

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

вэ

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Дикэр тэрэфдэн бу ардычыллыг юхарыдан мөһдуддур. Доғрудан да мөһрөчдэки 2-дэн бөйүк натурал эдэдлэри 2 илэ эвэз этсэк

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}}; \text{ аларыг.}$$

к-я 2, 3, ... n гиймэтлэрини версэк

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \\ &= 1 + 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] < 3 \end{aligned}$$

аларыг. Демэли $a_n < 3$ олур (бүтүн n-лэр үчүн). Монотон артан ардычыллыгларын принципинэ көрө $n \rightarrow \infty$ шэртиндэ a_n мүййән лимитэ яхынлашмалыдыр. Бу лимити e эдэди илэ ишарэ эдэк:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e.$$

Демэли,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (2)$$

бу ифадэ васитэсилэ e эдэдини истәнилэн дэгийгликлэ һесабыла биләрик. Бу эдэд

$$e = 2, 71828183...$$

сонсуз онлуг кәсрилэ ифадэ эдилэ биләр. Суал олунур: бу онлуг кәср дөвридирми, йә'ни e эдэди расионалдырмы? Һәммин суалын чавабы мәнфидир. e эдэди иррасионалдыр. Әксини фәрс эдэк, йә'ни тутаг ки, e расионал эдәддир. Онда $e = \frac{p}{q}$ шәклиндә кәстәрилмәлидир. $2 < e < 3$ олдуғундан e там эдәд дейилдир. Демэли, q—ән азы 2 олмалыдыр. (2) эйнилийинин һәр тәрәфини q!-а вурсаг аларыг:

$$\begin{aligned} e \cdot q! &= p \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (q-1) = [q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot q + \\ &+ \dots + (q-1)q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \end{aligned}$$

Бу бəрəбəрлийин сол тəрəфи вə сағ тəрəфдə орта мə'тəризə ичəрисиндəки əдəдлэр тaмдыр, сағ тəрəфдə гaлыг һəдди исə тaм дейилдир. Бу гaлыг һəдди $\frac{1}{2}$ -дэн кичикдир. Дoғрудaнлa, $q \gg 2$ oлдугундaн вə гaлыгдa aлынaн

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots$$

ифaдəсинин һəр һəдди

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots$$

азaлыр. Һəндəси cилcилəнин уйғун һəдлəрини ашмaдығындaн ғə һaбелə

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

oлдугундaн əдилəн һəкм дoғрудур.

2. Һəгиги əдəдлэр рaсиoнaл əдəдлəрин лимитидир

Əдəдлэр ардычыллығлары əдəдлэр cинфини кенишлəндирмəк үчүн əсac əйтият мəнбəидир. Һəр бир Һəгиги əдəдин мүй-йən əдəдлэр ардычыллығынын лимити кими тə'йин əдилмəsi ени тəбиəтли əдəдлəрин яранмасындa əсac aмил oлмушдур. Əввəлчə һəр бир Һəгиги əдəдин өзүнүн əксийи вə артығы илə кəтүрүлən сонлу онлуг һиссəлəri ардычыллығынын лимити oлдугуну исбaт əдəк. Тутaг ки, ихтияри мүcбəт α Һəгиги əдəди верилмишдир:

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Белə бир

$$a_1 = \alpha_0, \alpha_1; a_2 = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2; \dots; a_n = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n; \dots$$

вə

$$a_1^1 = \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}; a_2^1 = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{100}; \dots; a_n^1 = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}; \dots$$

əдəдлэр ардычыллығларынə нəзəрдən кечирəк.

Мə'лумдур ки,

$$0 < \alpha - a_n < \frac{1}{10^n} \quad \text{вə} \quad 0 < a_n^1 - \alpha < \frac{1}{10^n}$$

олар.

ε —габагчадан верилэн ихтияри мүсбэт эдэддир. Онда элэ бир натурал N эдэди тапмаг олар ки, $n > N$ олдугда

$$|x - a_n| = x - a_n < \varepsilon$$

олар. Айдындыр ки, һәмин N эдэдини

$$\frac{1}{10^n} > \varepsilon$$

мүнасибәтиндән тапмаг кифайәтдир. n артдыгча $\frac{1}{10^n}$ кичи-

лир вә $n \rightarrow \infty$ -да $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$. Она көрә дә мүәййән N нөмрә-

синдән сонра $\frac{1}{10^n} > \varepsilon$ олачагдыр.

Демәли, $n > N$ олдугда

$$|x - a_n| = |a_n - x| < \varepsilon$$

олур. Эләчә дә $n > N$ олдугда $|a_n^1 - x| < 0$ олар, йә'ни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^1 = x.$$

Бу чәһәт юхарыда ики һәгиги эдәдин чәминә вердийимиз тә'рифи әсасландырмаға имкан верир. Биз ики α вә β һәгиги эдәдләринин чәмини онларын уйғун тәгриби гиймәтләринин чәми васитәсилә тә'йин әтмишдик.

Һәр бир һәгиги эдәд бу һәгиги эдәди ифадә эдән сонсуз онлуг кәсрин сонлу һиссәләринин лимитиндән ибарәт олдуғу үчүн, ики һәгиги эдәдин чәми вә һасилинә уйғун сонлу һиссәләрин чәм вә һасилинин лимити кими тә'риф верилә биләр:

$$\alpha + \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

$$\alpha \cdot \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$$

§ 11. ЛИМИТ ҺАГГЫНДА ТЕОРЕМЛӘР

Әяни олмаг үчүн биз дәйишән кәмийәтин лимитинә аид әсас теоремләри әввәлчә ардычыллыглар үзәриндә исбат эдәчәйик. Сонра кәсилмәз дәйишән кәмийәтләр үчүн дә һәмин теоремләрин өз күчүндә галдығыны көстәрәчәйик.

1. Юхарыда дәйишән кәмийәтин лимитинә вердийимиз тә'рифин мүһүм чәһәтләрини айдынлашдырдыг вә бә'зи дәйишән кәмийәтләрин лимитини тә'йин әтдик. Лакин, кәмийәтин бир вә я бир нечә лимити олдуғу мәсәләсинә тохунмадыг. Истәр һәлл әтдийимиз мисалларда, истәрсә дә кәмийәтин лимитинә вердийимиз тә'рифдә бу вә я дикәр эдәдин кәмийәтин лимити олдуғуну йохладыг. Инди ортая белә бир суал

чыхыр: бөлкө, һәм мин кәмийәтнин башга бир лимити дә вардыр? Бу суалын чавабы ашағыдакы теоремин исбатынданайдын олачагдыр.

Теорем 1. Әкәр һәр һансы бир ардычыллыгын лимити варса, бу лимит ялныз бир дәнәдир.

Исбаты. Әксини фәрз эдәк; тутаг ки, a вә b әдәдләри, верилмиш $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ардычыллыгынын ики мұхтәлиф лимитләридир, йә'ни тутаг ки, бир тәрәфдән $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ди кәр тәрәфдән исә $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ -дир.

Ашкардыр ки, я $a > b$ вә я $b > a$ олачагдыр. Фәрз эдәк ки, $b > a$ -дыр. Тутаг ки, $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ -дир. Шәртә кәрә a вә b верилмиш ардычыллыгын лимитләридир. Онда һәм мин верилмиш $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ әдәдинә кәрә элә N_1, N_2 натурал әдәдләри олмалы-

дыр ки, бир тәрәфдән $n > N_1$ оlanda $|a_n - a| < \frac{b-a}{2}$, ди кәр тәрәфдән исә $n > N_2$ оlanda $|a_n - b| < \frac{b-a}{2}$ олар. Демәли, һәм N_1 вә һәм дә N_2 -дән бөйүк бүтүн n -ләр үчүн сонунчу ики бәрәбәрсизликләр өдәнилмәлидир. Инди $b - a$ фәргини

$$b - a = (b - a_n) - (a - a_n)$$

шәклиндә язаг. Бурадан

$$b - a \leq |b - a_n| + |a - a_n|$$

бәрәбәрсизлийини язмаг олар.

Юхаридакы ики бәрәбәрсизлийи нәзәрә алсаг

$$|b - a_n| + |a - a_n| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$$

олдуғуну кәрәрик.

Демәли, $b - a < b - a$ олмалыдыр.

Бу зиддийәт әйни йығылан ардычыллыгын ики мұхтәлиф лимити олмасы фәрзийәсинин доғру олмадыгыны көстәрир. Бу тәклиф эләчә дә $a > b$ олан һал үчүн дә исбат олунур.

Теорем 2. Лимити олан ардычыллыг мәһдуддур.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ -дыр. Онда габагчадан вери-

лән һәр бир мүсбәт ϵ әдәдинә (мәсәлән, $\epsilon = 1$ әдәдинә) кәрә элә натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ оlanda $|a_n - a| < 1$ олмалыдыр. Онда, $n > N$ оlanda

$$|a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1$$

олачагдыр. Инди, верилмиш ардычыллыгын биринчи N һәд-

динин

$$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N|$$

мүтлэг гиймэтлэрини нэвэрдэн кечирэк. Верилмиш бу N эдэд-дэв бириси башгаларындан кичик дейилдир.

Тутаг ки,

$$|a_r|, (r \leq N)$$

белэ һэддир. Инди $|a|+1$ вэ $|a_r|$ кими ики эдэди мүгайисэ эдэк.

Бурада я

$$|a| + 1 \leq |a_r|$$

вэ я да эксинэ

$$|a| + 1 \geq |a_r|$$

олачагдыр.

$|a|+1$ вэ $|a_r|$ эдэдлэриндэн бөйүк оланьны M илэ ишарэ эдэк. Ашкардыр ки, $M > 0$ -дыр.

Демэли, истэр $n \leq N$, истэрсэ дэ $n > N$ олан бүтүн n -лэр үчүн $|a_n| < M$ олачагдыр.

Бунунла теорем исбат эдилмиш олур.

2. Дэйишэн кэмиййэтлэрин гиймэтлэри эдэд олдуғундан, эдэдлэр үзэриндэ эдилэн һесаб эмэллэри дэйишэн кэмиййэтлэр үчүн тэ'риф вэ тэтбиг эдилэ билэр.

1) x_n, y_n кими ики дэйишэн кэмиййэтин чэми, онларын уйғун $n=1, 2, \dots$ гиймэтлэриндэ тэ'йин эдилэн үчүнчү $x_n + y_n$ дэйишэн кэмиййэтинэ дейилир.

2) x_n, y_n кими ики дэйишэн кэмиййэт һасили онларын уйғун $n=1, 2, \dots$ гиймэтлэриндэ тэ'йин эдилмиш үчүнчү $x_n \cdot y_n$ дэйишэн кэмиййэтинэ дейилир.

3) x_n, y_n кими ики дэйишэн кэмиййэтин нисбэти $y_n \neq 0$ ол-дугда онларын уйғун $n=1, 2, \dots$ гиймэтлэрилә тэ'йин эдилэн үчүнчү $\frac{x_n}{y_n}$ дэйишэн кэмиййэтинэ дейилир.

Ашағыдакы теоремлэр лимитэ кечмэни бир эмэл кими характеризэ этмәклэ янашы, кэмиййэтлэрин лимитини һесаб-ламаг үчүн һәм дэ әсас формуллардыр.

Тутаг ки, ихтияри ики

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

вэ

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad (2)$$

ардычыллыгы верилмишдир.

Теорем 3. Әкәр (1), (2) ардычыллыгларынын лимитлэри вардырса, онда бу ардычыллыгларын чэминин дэ лимити вардыр вэ бу лимит (1), (2) ардычыллыгларынын уйғун лимитлэри чэминэ барабәрдир.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$; исбат эдэк ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$

йә'ни: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ габагчадан верилән ихтияри эдәддир. Онда һөкмән элә N_1, N_2 натурал эдәлләри вардыр ки, $n > N_1$ олдугда

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

олмалыдыр, $n > N_2$ олдугда исә

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

олмалыдыр.

N_1, N_2 эдәлләриндән бөйүйүнү N илә ишарә эдәк. $n > N$ олдугда айдындыр ки, һәм (3) вә һәм дә (4) бәрабәрсизликләри өдәниләчәкдир.

Онда $|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ олдуғундан, $n > N$ оlanda $(x_n + y_n) -$

$$-(x + y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ олачагдыр.}$$

Демәли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$$

вә я

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

формулуну элдә эдәрик.

Теорем 4. Үчүнчү теоремин шәртләри дахилиндә ики ардычыллыгын фәргинин лимитләри онларын лимитләри фәргинә бәрабәрдыр, йә'ни:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Теорем 5. Әкәр (1), (2) ардычыллыгларынын лимитләри вардырса, онда бу ардычыллыгларын һасилинин дә лимити вардыр вә бу лимит (1), (2) ардычыллыгларынын уйғун лимитләри һасилинә бәрабәрдыр.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$; исбат эдәк ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = xy$ вә я $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ олур, йә'ни исбат эдәк ки, габагчадан верилмиш һәр бир мүсбәт ε эдәдинә көрә, элә натурал N эдәди вардыр ки, $n > N$ оlanda $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$ олур. $x_n y_n - xy$ ифадәсинин үзәринә $x y_n$ һәддини кәләк вә чыхаг. Онда:

$$x_n y_n - x \cdot y = x_n y_n - x y_n + x y_n - x y = (x_n - x) y_n + x (y_n - y)$$

аларыг. Бурадан

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n - x| |y_n| + |x| |y_n - y|.$$

Лимит һаггындакы икинчи теоремә көрә йығылан y_n кәмийәти мөһдуддур, һә'ни әлә бир мүсбәт M әдәди вардыр ки, бүтүн n -ләр үчүн

$$|x_n| \leq M$$

олачагдыр. Инди $|x|$ вә M әдәдләринин бөйүйүнү K илә ишарә әдәк.

Дикәр тәрәфдән $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ олдуғу үчүн $\frac{\varepsilon}{2K}$ әдәдинә көрә әлә натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n -ләр үчүн

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2K},$$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

олачагдыр.

$n > N$ оlanda, әйни заманда

$$|x_n y_n - xy| < \frac{\varepsilon K}{2K} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

олачагдыр.

Демәли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x \cdot y$$

вә я

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

олур. Сабит кәмийәтләрин лимити өзүнә бәрәбәр олдуғу үчүн бу теоремә көрә,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot x_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

олар; башга сөzlә десәк, әкәр бир ардычыллығын лимити варса, сабит кәмийәти лимит ишарәси гаршысына чыхармаг олар.

Хүсуси һалда $a = -1$ оларса, $a y_n = -y_n$ олар. Демәли $\lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = -y$ олар.

Онда

$$x_n - y_n = x_n + (-y_n)$$

әйнилийи доғру олдуғундан үчүнчү теоремә көрә,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n + (-y_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = x - y$$

мүнасибәтини әлдә әдәрик. Бу исә дөрдүнчү теоремин исба- тындан ибарәтдир.

Теорем 6. Һәммин шәртләр дахилиндә әкәр (2) ардычыллығы- нын лимити сыфыр дейилдирсә, онда (1) вә (2) ардычыллыглар- ынын нисбәтинин лимити онларын лимитләри нисбәтинә бәрә-

бәрдир, йә'ни $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0$ оларса $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

Исбаты. Тутаг ки, енә дә $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ -дир.

Әввәлчә исбат әдәк ки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}.$$

Она көрә дә, $\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right|$ фәргини гыймәтләндирәк,

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n| |y|}$$

аларыг. Лимитин тә'рифинә көрә n -ин сечилмәси илә $|y_n - y|$ -и габагчадан верилән һәр бир әдәддән о чүмләдән $\frac{|y|}{2}$ -дән дә кичик этмәк олар, йә'ни әлә бир натурал N_1 әдәди вардыр ки, $n > N_1$ оlanda $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ олачагдыр.

Онда,

$$|y| = |(y - y_n) + y_n| \leq |y - y_n| + |y_n|$$

доғру олдуғундан, $|y| - |y_n| \leq |y - y_n| < \frac{|y|}{2}$

олар.

Демәли, $n > N_1$ оlanda

$$-|y_n| < -\frac{|y|}{2}$$

олмалыдыр. Бу бәрабәрсизлийин һәр тәрәфини (-1) -ә вурсаг

$$|y_n| > \frac{|y|}{2} \quad (5)$$

бәрабәрсизлийини аларыг. Дикәр тәрәфдән габагчадан верилмиш $\epsilon > 0$ әдәдинә көрә әлә N_2 натурал әдәди сечмәк мүмкүндүр ки, $n > N_2$ оlanda

$$|y_n - y| < \frac{1}{2} |y|^2 \cdot \epsilon \quad (6)$$

бәрабәрсизлийи тә'мин әдилир. Инди N_1, N_2 әдәдләриндән ән бөйүйүнү сечәк вә ону N_2 илә ишарә әдәк. Онда $n > N$ олдуғ-

да һәм (5) вә һәм дә (6) бәрабәрсизлийи өдәнилик. Белә олдуғда $n > N$ -ләр үчүн

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n| |y|} < \frac{\frac{1}{2} |y|^2 \cdot \varepsilon}{|y| \cdot \frac{1}{2} |y|} = \varepsilon$$

олачагдыр.

Демәли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$$

формулу доғрудур.

Инди дә

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$$

шәклиндә язаг. Бешинчи теоремә көрә,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

олар. Бу исә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

теоремин һөкмүнү исбат эдир. Инди исә бәрабәрсизликләрдә лимитә кечмәнин мүмкүн олдуғуну әсасландыран ашағыдакы теореми исбат эдәк.

Теорем 7. Әкәр (1), (2) ардычыллыгларынын лимитләри вардырса, вә бу ардычыллыгларын һәдләри үчүн $x_n \leq y_n$ бәрабәрсизликләри өдәниләрсә, онда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

бәрабәрсизлийи өдәниләчәкдир.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ -дир. Теореми әввәлчә хусуси һал үчүн исбат эдәк. Фәрз эдәк ки,

$$x_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сабитин лимити өзүнә бәрабәр олдуғуна көрә, $x=0$ олмалыдыр. Демәли, бу һалда $y_n \geq 0$ бәрабәрсизлийи верилдикдә $y \geq 0$ олдуғу исбат эдилмәлидир. Әксини фәрз эдәк. Фәрз эдәк ки, $y < 0$ -дир. Лимитин тә'рифинә көрә верилмиш $\varepsilon = |y|$ әләдинә көрә кафи гәдәр бөйүк n үчүн

$$|y_n - y| < |y|$$

олачагдыр. Бу бәрабәрсизликләри

$$-|y| < y_n - y < |y|$$

шәклиндә дә яза биләрик.

Бурадан

$$y - |y| < y_n < |y| + y$$

олачагы айдындыр. $y < 0$ олдугундан $|y| = -y$ олар. Демели, $|y| + y = 0$ олмалыдыр. Она көрө дө, $y_n < |y_n| + y = 0$, вә я $y_n < 0$ олмалыдыр. Демели, $y_n \geq 0$ шәртинә зидд нәтичәйә кәлиб чыхдыг. Бу зиддийәт $y < 0$ фәрзийәсинин дүзкүн олмадыгыны көстәрир.

Инди үмуми һала кечәк. Шәртә көрө

$$x_n \leq y_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

олмалыдыр. Бурадан $y_n - x_n \geq 0$ олур. Инди чә исбат этдийимиз хусуси һала көрө $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) \geq 0$ мүнәсибәтини яза биләрик. Дөрдүнчү теоремә көрө $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x$ йә'ни $y - x \geq 0$ олачагдыр. Бурадан, $x \leq y$ олачагдыр.

Демели,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

олур. Бунунла да теорем исбат олунур.

Мисаллар. 1) Үмуми һәдди $\left(\frac{3n+4}{n}\right)^2$ олан ардычыллыгын лимитини һесаблаиын.

$$\text{Бурада } x_n = \left(\frac{3n+4}{n}\right)^2.$$

Ашкардыр ки,

$$x_n = \frac{3n+4}{n} \cdot \frac{3n+4}{n} = \left(3 + \frac{4}{n}\right) \left(3 + \frac{4}{n}\right)$$

шәклиндә яза биләрик.

Онда, лимитләр һаггындакы дөрдүнчү теоремә көрө,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right)$$

олар. Бурада $\frac{4}{n}$ сонсуз кичилән кәмийәтдир, n -ин һүдуд-

суз артырылмасы илә $\frac{4}{n}$ сыфра яхынлашыр.

Она көрө дө,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3$$

олур. Демели,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{n} \right)^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

олур.

2) Үмуми һәдди $\frac{2n^3 - 3n^2 + 5n + 1}{n^3 - 5}$ олан ардычыллыгын лимитини һесаблиайын.

Айдындыр ки, бурада:

$$x_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 5n + 1}{n^3 - 5}$$

кәсринин сурәт вә мәхрәчини n^3 -а бөлсәк

$$x_n = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{5}{n^3}}$$

аларыг. Лимитә аид үчүнчү вә бешинчи теоремләре көрә

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n^3} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}} = 2 \end{aligned}$$

олачагдыр.

Айдындыр ки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3} = 0.$$

3. Биз лимитә аид әсас теоремләрин исбатында айры-айры кәмийәтләрин лимитинин варлыгыны фәрз әдиб, онларын чәминин, һасилинин, нисбәтинин (мәхрәчин лимити сыфыр олмадыгда) лимитинин варлыгыны исбат этдик.

Лакин айры-айры кәмийәтләрин лимити олмадыгда белә, һәммин кәмийәтләрин чәминин, һасилинин, нисбәтинин лимити мөвчуд ола биләр.

Мисаллар. 1) Тутаг ки, $x_n = 2n^2$,

$$y_n = 5 - 2n^2.$$

Бу кәмийәтләре уйғун ардычыллыгларын һәр икиси дағылыр, һәр икиси сонсуз бөйүәндир. Лакин һәммин кәмийәтләрин чәминин лимити 5-дир:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [2n^2 + (5 - 2n^2)] = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5.$$

2) Инди тутаг ки, $x_n = 3n^2$,

$$y_n = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Бурада $x_n = 3n^2$ кәмийәтинин гиймәтләри ардычыллыгы дағыландыр, бу кәмийәт сонсуз бөйүәндир. Лакин $x_n \cdot y_n$ кәмийәтинин лимити вардыр.

Доғрудан да,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3n^2 \cdot \frac{1}{n^2 - 1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{1 - \frac{1}{n^2}} \right] = \\ &= \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} = 3. \end{aligned}$$

3) Нәһайәт, $x_n = (-1)^n$, $y_n = n$ олсун.

Биз x_n вә y_n кәмийәтләринин лимитләринин олмадығыны юхарыда көрүрүк. Лакин,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

кәмийәтинин лимитинин сыфра бәрабәр олдуғуну көрмәк чәтин дейилдир. Элчә дә, $x_n = 1 + (-1)^n$, $y_n = n$ кәмийәтләринин лимитләринин олмадыгларыны юхарыда көрдүк. Юха-

рыда һәм дә, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ кәмийәти лимитинин сы-

фыр олдуғуну өйрәндик. Демәли, айры-айры ики кәмийәтин лимити олмаса белә, онларын нисбәтинин лимити ола биләр.

4. Биз лимитә аид әсас теоремләри, гиймәтләри ардычыллыг олан дәйишән кәмийәтләр үчүн исбат этдик. Эйни теоремләри кәсилмәз дәйишән кәмийәтләр үчүн дә исбат эдә биләрик. Нүмунә үчүн бу теоремләрдән ики дәйишән кәмийәтин чәминин лимити һаггындакы теореми исбат эдәк.

Теорем. Дәйишмә просесләри эйни, лимитләри уйғун оларак a вә b олан дәйишән x вә y кәмийәтләри чәминин лимити вардыр вә бу лимит $a + b$ -йә бәрабәрдир. Башга сөzlә, лимити олан ики дәйишән чәминин лимити һәмин кәмийәтләрин лимитләри чәминә бәрабәрдир, йә'ни, әкәр, $\lim x = a$, $\lim y = b$ исә $\lim (x + y) = a + b$ -дир.

Исбаты. Теореми исбат әтмәк үчүн x вә y кәмийәтләринин дәйишмә просесиндә $[(x + y) - (a + b)]$ фәргинин габагчадан верилән ихтияри мүсбәт ε эдәдиндән кичик ола билдийи-

ни вә кичик галдығыны исбат этмәлийик. Айдындыр ки, x вә y кәмийәтләринин бүтүн дәйишмә просесләриндә

$$|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \leq \\ \leq |x - a| + |y - b|$$

бәрабәрсизлийи өдәнилик. Лакин шәртә көрә $x \rightarrow a$ олдуғундан дәйишмә просесинин мүййән һалындан башлаяраг кәләчәк бүтүн һалларда $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ бәрабәрсизлийи тәмин

әдиләчәкдир. Просесин һәмин һалыны гейд әдәк. Шәртә көрә эйни заманда $y \rightarrow b$ -дир. Енә дә y -ин дәйишмә просесинин мүййән һалындан башлаяраг кәләчәк бүтүн һалларда

$$|y - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ бәрабәрсизлийи өдәниләчәкдир. Биз } y\text{-ин дә}$$

дәйишмә просесинин һәмин һалыны гейд әдәк. Инди дәйишмә просесинин гейд этдийимиз һаллары мұхтәлифдирсә, бу һаллардан сонра кәлән һалы гейд әдәк. Айдындыр ки, просесин бу һалындан башлаяраг кәләчәк бүтүн һалларда

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|y - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизликләри эйни заманда өдәниләчәкдир. Онда просесин һәмин һалындан башлаяраг

$$|(x + y) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

олачагдыр, йә'ни

$$\lim (x + y) = a + b$$

вә я

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y$$

олур. Әлчә дә, о бири теоремләри исбат этмәк олар.

5. $x \rightarrow a$ -да ики функциянын чәминин, һасилинин вә мәрәчин лимити сыфыр олмадыгда исә һәмин ики функциянын нисбәтинин лимити уйғун олараг, онларын лимитләри чәминә, һасилинә, нисбәтинә бәрабәр олдуғуну исбат этмәк олар.

Гейд этмәк لازمдыр ки, лимит анлайышынын юхарыда верилән мұкәммәл риязи тә'рифи кечән әсрин әввәлләриндә гәт'и мүййән әдилмишдир. Бу тә'риф бөйүк франсыз риязийәтчысы Кошинин (1789—1857) ады илә бағлыдыр. Кошидән әввәл лимитә вә бир сыра башга риязи анлайышлара верилән тә'рифләр дәгиг олмамышдыр. Түкәнмәз ярадычылыг истә'дадына малик олан Коши, риязи анализин бир чох анлайышларыны һәмишәлик дирчәлтмишдир вә дүзкүн инкишаф йолуна салмышдыр.

§ 12. Һәгиги әдәдләр нәзәрийәсинә даир

Китабын I һиссәсиндә сонлу вә сонсуз олуг кәсри һәгиги әдәд дейә адландырдыг. Рационал әдәди ифадә этмәйән онлуг кәсрләрә исә иррационал әдәд ады вердик.

Һәмин бәһсдә рационал әдәдләрин дәври онлуг кәсрләрдән, иррационал әдәдләрин исә дәври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрдән ибарәт олугуну сүбүт этдик. Лакин бу тә'рифләр чох да гәнаәтбәхш һесаб әдилә билмәз.

Доғрудан да, онлуг системи бүтүн башга мүмкүн олан системләрдән тәбиәти ә'тибарилә һеч дә фәргләнмир. Системин әсасында он көтүрдүйүмүз кими башга әдәд дә көтүрә биләрик. Буна көрә дә системин әсасынын 10 вә я башга әдәд олмасындан асылы олмаяраг, һәгиги әдәдин даһа үмуми тә'рифини вәрмәк зәрурәти мейдана чыхыр.

Һәгиги әдәдин үмуми тә'рифини бәсит шәкилдә ашағыдакы кими верә биләрик. Белә ки, бурада рационал әдәдләр вә әдәд оху анлайышларыны һазыр гәбул әдәчәйик. Әдәд оху үзәриндә учлары рационал әдәдләрдән ибарәт олан мүәййән парчалар ардычыллығы көтүрәк:

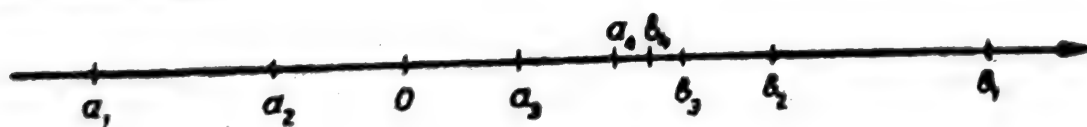
$$I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$$

белә ки, бурада һәр сонракы парча әввәлкинә дахил олур; n һүдудсуз олараг артдыгда n -чи I_n парчасынын бою исә сыфра яхынлашыр. Бу чүр ардычыллыглара бир-биринә дахил олан парчалар ардычыллығы дейилир.

Тутаг ки, бу парчаларын учлары a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) рационал әдәдләриндән ибарәтдир:

$$I_n = [a_n, b_n].$$

Парчаларын бир-биринә дахил олмасы да 20-чи шәкилдә көс-тәрилмишдир.



20-чи шәкил

Үмумийәтлә $[a, b]$ парчасынын узунлуғу $b - a$ әдәдинә дейилир (бурада $b > a$ олмалыдыр).

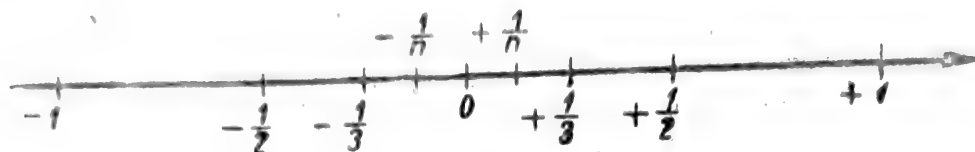
Гейд әтмәк лазымдыр ки, һәр бир-биринә дахил парчалар ардычыллығыны бир-биринә дахил олан парчалар ардычыллығы адландырмаг олмаз. Бурада әсас шәртләрдән бириси парчаларын бойларынын кет-кетә сыфра яхынлашмасыдыр.

Мәсәлән:

$$[-1, +1], \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right], \dots, \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right], \dots$$

парчалар ардычыллыгы бир-биринэ дахил ола парчалар ардычыллыгыдыр (21-чи шәкил).

Бурада һәр сонракы парча әввәлки парчая дахилдир вә әлвә



21-чи шәкил

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n} \right]$$

парчасынын узунлуғу $n \rightarrow +\infty$ -да

$$\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

сыфра яхынлашыр.

Ашағыдакы һәндәси тәклифи әсас гәбул әдәк.

Әдәд охунда бир-биринэ дахил парчалар ардычыллыгынын һамысына мәхсус бир нөгтә вардыр. Һәмин нөгтәни һәгиги әдәд адландыраг. Рационал олмаян нөгтәни исә *иррационал* әдәд адландыраг. Инди бир-биринэ дахил парчалар ардычыллыгынын һамысына мәхсус олан нөгтәнин екәнә олуб-олмамасы суалына чаваб верәк.

Исбат әдәк ки, һәр бир-биринэ дахил парчалар ардычыллыгынын һамысына мәхсус ялныз бир нөгтә вардыр.

Тутаг ки, бир-биринэ дахил

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

парчалар ардычыллыгынын һамысына ики мүхтәлиф a вә b нөгтәләри дахилдир ($a \neq b$). Онда айдындыр ки, я $a < b$ вә я $a > b$ олачагдыр. Тутаг ки, $a < b$ -дир. Онда $b - a > 0$ олар. Бу һалда һәмин әдәдләрин тә'йин этдийи $[a, b]$ парчасы эйни заманда бүтүн $[a_n, b_n]$ парчаларына дахил олачагдыр. Бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки n -ин артмасы илә $b_n - a_n$ фәрғи истәнилән гәдәр кичилдийиндән мүйәйән $n = N_0$ нөмрәсиндән сонра $b_n - a_n < b - a$ олачагдыр; узунлуғу сыфыр олмаян парча, узунлуғлары сыфра яхынлашан парчалара дахил ола билмәз. Бу зиддийәт $a \neq b$ фәрзийиәсинин доғру олмадығыны сүбут әдир. Беләликлә, һәгиги әдәдин инди вердийимиз тә'рифи васитәсилә әдәд охунун нөгтәләри илә әдәдләр арасында там уйғунлуғ ярадылмыш олду.

Һәгиги әдәдин бу тә'рифиндә әслиндә һеч бир мүһүм енилик йохдур. Бурада һәгиги әдәдин сонсуз онлуғ кәср кими тә'рифи бир гәдәр үмуми шәкилдә дейилмишдир. Енә дә охучу шүбһә этмәйә һағлыдыр. Эйни заманда бүтүн парчалара дахил олан бу „нөгтә“ нә демәкдир? Биз белә бир нөгтәнин

варлығыны бир һәндәси фәрзийә кими гәбул этдик. Бу фәрзийәни һәндәсәдә тәсадүф этдийимиз тәчрүбәләрдә интуитив доғру һесаб әдилән башга аксиомлар кими гәбул этдик. Әсл мәсәлә күндәлик һәят вә һәрәкәтләримиздә һисс әдәрәк доғру һесаб олуна тәклифләрин аксиом дейә гәбул әдилмәси дейил, бу тәклифләрдән дүзкүн мәнтиги нәзәрийәни һәсил әдилә билмәси имканыдыр. Она көрә дә, вердийимиз тә'рифин һәятилийи, нәзәри чәһәтдән тутарлы олмасы вә бир нәзәрийә чәрчивәси дахилиндә зиддийәтсизлик тәләбләри дәрһал мейдана чыхыр. Һәгиги әдәдә вердийимиз ени тә'рифи бу чәһәтдән йохлаяг.

Биз формал чәһәтдән әдәд охунун ялныз расионал әдәдләрдән ибарәт олдуғуну фәрз әдә биләрик. Сонра иррасионал әдәди (йә'ни ени тәбиәтли әдәди) әдәд оху үзәриндә бир-биринә дахил парчалар ардычыллығыны көстәрән символ кими тә'йин әдә биләрдик. Бунунла иррасионал нөгтә, узунлуглары сыфра яхынлашан бир-биринә дахил расионал парчалар васитәсилә тамам тә'йин әдилмиш оларды. Башга сөzlә, бизим һәндәси фәрзийәмиз тә'риф олагаг гәбул олуна биләр. Иррасионал әдәди бир-биринә дахил парчалар ардычыллығы кими тә'риф этдикдә, көрәк иррасионал әдәдләри топламаға, чыхмаға, вурмаға, бөлмәйә имканымыз вармы? Эләчә дә бу ишдән сонра иррасионал әдәдләр арасында расионал әдәдләр мейданында олдуғу кими бәрабәрсизлик мүнәсибәти дүзәлдә биләрикми? Бурада әсас мәсәлә иррасионал әдәдләрин ени нәзәрийәсинин расионал әдәдләр нәзәрийәсинә зидд чыхмамасы, онун билава-ситә давамы, үмумиләшмәси олмасы мәсәләсидир.

Мәсәлән, иррасионал α вә β әдәдләринин чәмини тә'йин әтмәк үчүн бу α вә β иррасионал әдәдләрини тә'йин әдән бир-биринә дахил парчалар ардычыллығы васитәсилә, чәми ифадә әдән бир-биринә дахил башга бир парчалар ардычыллығыны гурмалыйыг. Бу ардычыллығы α вә β әдәдләрини тә'йин әдән парчаларын уйғун учларынын чәминдән дүзәлән ардычыллыг кими тә'йин әтсәк, әләчә дә $\alpha \cdot \beta$ һасилини, $\alpha - \beta$ фәргини,

$\frac{\alpha}{\beta}$ нисбәтини уйғун учларын һасилиндән, фәргиндән, нисбәтиндән дүзәлән ардычыллыглар кими тә'йин әтсәк, расионал әдәдләр нәзәрийәсинин әсас хассәләри хүсуси һалда өдәниләр вә она зидд олмаян һәгиги әдәдләр нәзәрийәси һасил әдиләр. Бу гануналарын (коммутативлик, ассоциативлик, дистрибутивлик) иррасионал әдәдләрә хас олдуғуну көстәрмәк һеч бир чәтинлик төрәтмир. Лакин адәтән риязийяты өйрәнмәйә башлаян һәр кәс әввәлчә онун мәнтиги әсаслары илә дейил, тәтбиги илә марагланыр. Тарихән дә белә олмушдур. XIX әсрин ахырларына гәдәр бөйүк риязийятчыларын һамысы әдәд һаггында садә бир тәсәввүрә саһиб олагаг ени кәшфләр әтмишләр. Белә бир йолла кетмәк һеч дә мүәсир адама бә-

раәт газандырмыр. Риязийятын мәнтиги әсасларыны өйрәнмәк тәкчә риязийят хатиринә дейил, мәнтиги күчләндирмәк, һоризонту кениш олан бир билийә йийәләnmәк, һәяти һадисәләри даһа дәриндән дәрк әтмәйә көмәк әдән әсас васитәдир.

XIX әсрдән башлаяраг әдәд һаггында садә тәсәввүр даирәсиндән чыхан вә әдәдләр нәзәрийәсини әсасландырмаға чалышан риязийятчылар да аз олмамышдыр.

Бу алимләрдән Йохан Вейерштрас (1815—1897), Рихард Дедекин (1831—1916), Георги Кантор (1845—1918) совет алим А. Н. Колмогоров вә башгалары олмушдыр.

Дедекиндин идеясы расионал әдәдләр синфиндә кәсикләр нәзәрийәсинә әсасланыр.

Тутаг ки, һәр һансы васитә илә олурса-олсун расионал әдәдләр чохлауы ики A вә B синфинә айрылмышдыр, белә ки, B синфинин һәр бир b әдәди A синфинин һәр бир a әдәдиндән бөйүкдүр. Расионал әдәдләр синфиндә һәр бир белә тәснифә *кәсик* дейилир. Расионал әдәдләр синфиндә һәр бир кәсик ашағыдакы үч һалын бириси илә тә'йин әдилир.

1) A синфиндә ән бөйүк элемент вардыр. Буну a^* илә ишарә әдәк. A әдәдләр чохлауының ән бөйүк элементи әлә a^* элементинә дейилир ки, 1) A -дакы әдәдләрин һамысы a^* -дан бөйүк дейил вә 2) һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә A -нын әлә a_0 элементи вардыр ки,

$$a_0 > a^* - \varepsilon$$

олур.

2) B синфиндә ән кичик b^* элементи вардыр.

B әдәдләр чохлауының ән кичик элементи әлә b^* әдәдинә дейилир ки, 1) B -дәки бүтүн элементләр b^* -дан кичик дейил вә 2) һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә B -нин әлә b_0 элементини тапмаг олар ки,

$$b_0 < b^* + \varepsilon.$$

3) нә A синфинин ән бөйүк, нә дә B синфинин ән кичик элементи вардыр.

Башга һал йохдур. Мәсәлән, белә бир һал мүмкүн дейилдир:

Тутаг ки, A синфинин ән бөйүк элементи (a^*), B синфинин ән кичик элементи (b^*) вардыр. Әкәр бу һал мүмкүн олсайды, онда $\frac{a^* + b^*}{2}$ элементи, a^* -дан бөйүк вә b^* -дан кичик олдуғу

үчүн биринчи һалда B -йә, икинчи һалда исә A -я дахил олмалы иди. Бу исә кәсийин тә'рифинә зиддир, чүнки A синфинин һәр бир элементи, о чүмләдән $\frac{a^* + b^*}{2}$ элементи B синфинин һәр бир элементиндән о чүмләдән $\frac{a^* + b^*}{2}$ -дән кичик, йә'ни

$\frac{a^* + b^*}{2} < \frac{a^* + b^*}{2}$ олмалыдыр. Үчүнчү halда, йә'ни A синфиндә ән бөйүк элемент, B синфиндә исә ән кичик элемент олмамасы halында кәсийин тә'йин этдийи вә я ифадә этдийи әдәдә *иррасионал әдәд* дейилир.

Һәгиги әдәдләрин дикәр бир нәзәрийәсини Г. Кантор вермишдир. Кантор нәзәрийәсинин әсасы бизә мә'лум олан ашағыдакы мұлаһизәләрдир:

1) һәгиги әдәдләри сонсуз онлуг кәср кими изаһ этмәк;

2) сонсуз онлуг кәсрләрә сонлу онлуг кәсрләрин лимити кими бахмаг.

Һәгиги әдәдләри Дедекинд вә Кантор нәзәрийәси бири дикәриндән нәтичә кими әлдә әдилә биләр.

Бир-биринә дахил парчалар һаггындакы принципә истинад әдәрәк ардычыллыгларын йығылмасыны кәстәрән ашағыдакы әламәти исбат әдәк. Артмаян вә сыфра йығылан һәр бир

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

мүсбәт әдәдләр ардычыллыгына, ихтияри натурал p вә n әдәдинә кәрә

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n \quad (1)$$

шәртинин олмасы

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (2)$$

ардычыллыгынын йығылмасы үчүн зәрури вә кафидир.

Буну исбат этмәк үчүн әввәлчә (1) шәртинин зәрури олдуғуну исбат әдәк, йә'ни (2) ардычыллыгынын йығылан олдуғуну фәрз әдиб, (1) шәртинин өдәнилдийини исбат әдәк. Тутаг ки, (2) ардычыллыгы мүйәйән c әдәдинә йығылыр. Монотон аза-лан вә сыфра йығылан ихтияри

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$$

мүсбәт әдәдләр ардычыллыгыны кәтүрәк. Айдындыр ки, һәр бир δ_m әдәдинә кәрә әлә N_m әдәдини тапмаг олар ки, $n > N_m$ олдугда

$$|x_n - c| \leq \frac{\delta_m}{2}$$

олар. Демәли, бу halда

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &= |(x_n - c) - (x_{n+p} - c)| \\ &\leq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| < \frac{\delta_m}{2} + \frac{\delta_m}{2} = \delta_m \end{aligned}$$

олачагдыр (бурада $n > N_m$ иди).

Инди исә тутаг ки,

$$n \leq N_1, \quad n + p > N_1;$$

онда

$$|x_n - x_{n+p}| \leq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| < l + \frac{\delta_1}{2}$$

олмалыдыр. Бурада l эдәди

$$|x_1 - c|, |x_2 - c|, \dots, |x_{N_1} - c|$$

эдәдләриндән эн бөйүйдүр. Айдындыр ки, n вә $n + p$ натурал эдәдләринин икисиндән бириси N_1 -дән бөйүк олмадыгда

$$|x_n - x_{n+p}| \leq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| < 2l$$

олар. Үмуми һәдди (ϵ_n) ашағыдакы шәртләрә табе олан

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$$

мүсбәт эдәдләр ардычыллығыны гураг.

1) $n \leq N_1$

олдугда

$$\epsilon_n = 2l + \delta_1$$

олсун.

2) $N_m < n \leq N_{m+1}$

олдугда исә

$$\epsilon_n = \delta_m$$

олсун.

Айдындыр ки, һәммин шәртләр васитәсилә тә'йин эдилән ϵ_n -ә көрә

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon_n$$

өдәниләчәкдир; бундан башга $n \rightarrow \infty$ -да $\epsilon_n \rightarrow 0$ -ыр (чүнки $\delta_m \rightarrow 0$).

Инди исә шәртин кафи олдуғуну исбат әдәк, йә'ни

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$$

артмаян вә сыфра йығылан эдәдләр ардычыллығына, ихтияри p натурал эдәдинә вә мүййән m эдәдини ашан бүтүн n -ләрә көрә

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon_n \quad (3)$$

өдәнилдийини фәрз әдиб (2) ардычыллығынын һәр һансы бир һәгиги c эдәдинә йығылдығыны исбат әдәк.

Тутаг ки, a , эдәди сонлу сайда

$$x_{m+1} - \epsilon_{m+1}, x_{m+2} - \epsilon_{m+2}, \dots, x_v - \epsilon_v,$$

эдәдләрини эн бөйүйү, b , эдәди исә сонлу сайда

$$x_{m+1} + \epsilon_{m+1}, x_{m+2} + \epsilon_{m+2}, \dots, x_v + \epsilon_v,$$

эдәдләринин эн кичийидир. v артанда a , эдәдинин азалмаячағы, b , ин исә артмаячағы айдындыр, чүнки сонлу сайда эдәдләрә ени эдәдләр гошлугда эн бөйүк олан эдәд азалмаз, эн кичик эдәд исә артмаз. Буну мисал үзәриндә изаһ әдәк. Тутаг ки,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 2, 2\frac{1}{3}$$

эдәдләри верилмишдир. Бу эдәдләрдән эн бөйүйү $2\frac{1}{3}$, эн

кичийи исә $\frac{1}{2}$ -дир (бурада эйни чохлуғун көтүрүлмәси ма-
һийәтә зидд дейилдир).

Инди һәм ин әдәдләре ени әдәдләре гошаг:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 2, 2\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3\frac{1}{2}.$$

Бу әдәдләрдән ән бөйүйү $3\frac{1}{2}$, ән кичийи исә $\frac{1}{3}$ -дир.

Әкәр $3\frac{1}{2}$ дахил олмайыб, $2\frac{1}{2}$ -дән кичик әдәд дахил
олса иди, ән бөйүк әдәд енә дә $2\frac{1}{2}$ олачагды.

Она көрә дә әкәр $\nu > \mu$ исә

$$a_\nu \geq a_\mu, \\ b_\nu \leq b_\mu$$

олмалыдыр.

(3) бәрабәрсизлийини белә дә яза биләрик:

$$-\epsilon_n < x_n - x_{n+p} < +\epsilon_n. \quad (4)$$

Тутаг ки, $n \leq \nu$, $p = q + \nu - n$ (йә'ни $q \leq p$). (4) бәрабәр-
сизлийиндән

$$x_n - \epsilon_n < x_{\nu+q} < x_n + \epsilon_n$$

аларыг.

Бу бәрабәрсизликләрдә

$$n = m + 1, m + 2, \dots, \nu$$

еринә яздыгда көрүрүк ки, һәм ин бәрабәрсизлик эйни за-
манда

$$x_{m+1} - \epsilon_{m+1}, x_{m+2} - \epsilon_{m+2}, \dots, x_\nu - \epsilon_\nu$$

фәргләри вә

$$x_{m+1} + \epsilon_{m+1}, x_{m+2} + \epsilon_{m+2}, \dots, x_\nu + \epsilon_\nu$$

чәмләринин һәр бир һәдди үчүн өдәнилик. Онда уйғун олараг
һәм ин бәрабәрсизлик бу әдәдләрдән ән кичийи вә ән бөйүйү
үчүн дә өдәниләчәкдир:

$$a_\nu < x_{\nu+q} < b_\nu.$$

Инди

$$\lambda < \mu < \nu$$

мүнасибәтини өдәйән вә m -дән бөйүк олан ихтияри үч әдәд
көтүрәк. Юхарыда гейд әтдийимизә көрә

$$a_\lambda \leq a_\mu \leq a_\nu < b_\nu \leq b_\mu \leq b_\lambda$$

яза биләрик. Бу бәрабәрсизликләри нәзәрдән кечирдикдә кө-
рүрүк ки, $[a_\nu, b_\nu]$ парчасы $[a_\mu, b_\mu]$ парчасына, бу да $[a_\lambda, b_\lambda]$
парчасына дахилдир.

Дикәр тәрәфдән

$$b_n - a_n \leq (x_n + \varepsilon_n) - (x_n - \varepsilon_n) = 2\varepsilon_n$$

олур. Бурада ν -ни кафи гәдәр бөйүк көтүрмәклә ε_n -ни истә-
нилән гәдәр кичик этмәк олар. Бу ону көстәрир ки,
 $[a_{m+1}, b_{m+1}], \dots, [a_n, b_n]$ парчалары бир-биринә дахил вә
бойлары сыфра яхынлашан парчалар ардычыллыгыдыр. Онда,
эйни заманда бу парчалара дахил олан бир c нөгтәси вардыр.
Белә олдугда ν -ни кафи гәдәр бөйүк көтүрсәк

$$|x_{n+q} - c| < \varepsilon$$

олар. Башга сөzlә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

олар.

Үмумилийи позмадан a_n, b_n -ләринин расионал әдәдләр олду-
ғуну фәрз этмәк олар. Әкс һалда $[a_n, b_n]$ парчаларынын
учлары иррасионал әдәдләр олдугда онлары әксийи вә
артыглыгы илә уйғун сонлу онлуг һиссәләри илә (йә'ни расио-
нал әдәдләрлә) әвәз этмәк лазымдыр.

ƏDƏBİYYAT

1. Агаев Н. Н.—Лимит һаггында, физика вә риязийят тәдриси (методик мәгаләләр мәчмуәси) дөрдүнчү бурахылыш, Азәрбайчан ССР Маариф Назирлийи, Бақы, 1957.
2. Агаев Н. Н.—Риязийятын маһийәтинә даир, „Физика вә риязийят тәдриси“ (методик мәгаләләр мәчмуәси), дөрдүнчү бурахылыш, Азәрбайчан ССР Маариф Назирлийи, Бақы, 1958
3. Андронов И. К. Арифметика дробных чисел и основных величин. Учпедгиз, 1953.
4. Андронов И. К. Арифметика натуральных чисел. Учпедгиз, 1954.
5. Белонковский П. Д. Основы теоретической арифметики. Учпедгиз, 1938.
6. Берман Г. Н. Число и наука о нем. Гостехиздат, 1948.
7. Большая Советская Энциклопедия, т. т. 3 и 47.
8. Ваченко-Захарченко М. Е. История математики т. 1, Киев, 1883.
9. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. Гостехиздат, 1941.
10. Каша А. Л. Ключ арифметики. Гостехиздат, 1956.
11. Курант Р. и Роббинс Г. Что такое математика, ОГИЗ, 1947.
12. Математика, ее содержание, методы и значение, том 1. Изд-во АН СССР, 1956.
13. Математическое просвещение, № 2, 1957.
14. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. Гостехиздат, 1951.
15. Маркушевич А. И. Действительные числа и основные принципы теории пределов. Изд-во АПН РСФСР, 1948.
16. Мәммәдбәйли Н. Ч.—Мүһәммәд Нәсирәддин Туси, Бақы, Ушагкәнчнәшр, 1957.
17. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. Учпедгиз, 1953.
18. З. И. Хәлилов—Даирәнин квадратурасы, Азәрб. ЭА нәшрийяты, Бақы, 1954.
19. З. И. Хәлилов—Инсанлар индики риязийята нечә кәлиб чатмышлар. Бақы, Ушагкәнчнәшр, 1955.
20. Энциклопедия элементарной математики. Книга первая—арифметика. Гостехиздат, 1951.

МҮНДЭРИЧАТ

I ниссэ Эдэд анлайышынын төкамүлү

§ 1. Натурал эдэдлэрин мөншөи вэ тэшэккүлү	3
1. Топлама вэ чыхма	14
2. Вурма вэ бөлмө	18
3. Сай системлэри	25
4. Эсли эдэдлэр	30
5. Эн бөйүк ортаг бөлөн вэ эн кичик ортаг бөлүнөн	33
§ 2. Кэсрлэрин мөншөи вэ тэшэккүлү	34
1. Кэсрлэрин топланмасы	42
2. Кэсрлэрин чыхылмасы	45
3. Кэсрлэрин вурулмасы вэ бөлүнмэси	47
§ 3. Мэнфи эдэдлэр	56
§ 4. Рационал эдэдлэр	61
1. Рационал эдэдлэрин хассэлэри	61
2. Рационал эдэдлэр үзэриндэ эдилэн топлама] вэ чыхма эмэллэринин хассэлэри	64
3. Рационал эдэдлэр үзэриндэ эдилэн бөлмө вэ вурма эмэллэринин хассэлэри	66
§ 5. Онлуг кэсрлэрин мөншөи вэ тэшэккүлү	69
Онлуг кэсрлэр нэзэрийһэси	70
§ 6. Иррационал эдэдлэр	76
Иррационал эдэдлэрин хассэлэри	84

II ниссэ. Ардычыллыглар вэ лимитлэр

§ 1. Көмийэтлэр һаггында	91
§ 2. Эдэдлэр ардычыллыгы һаггында	94
§ 3. Эдэди силсилэ	97
1. Эдэди силсилэнин үмуми һэддинин формулу	97
2. Көнар һэдлэрдөн эйни узаглыгда дуран һэдлэрин хассэси	98
3. Эдэди силсилэнин биринчи n һэддинин чэми	99
4. Эдэди орта	100
§ 4. Һэндэси силсилэ	103
1. Һэндэси силсилэнин үмуми һэддинин формулу	103
2. Һэндэси орта	103
3. Һэндэси силсилэнин сонлу сайда һэдлэри чэминин формулу	106
§ 5. Рекуррент ардычыллыглар	107
§ 6. Ардычыллыгларын һэндэси тэсвири	110
§ 7. Лимит һаггында	114
§ 8. Сонсуз кичилэн вэ сонсуз бөйүйөн көмийэтлэр һаггында	119
§ 9. Азалан һэндэси силсилэ	130
§ 10. Монотон ардычыллыглар	136
1. e эдэди (Эйлер эдэди)	138
2. Һэгиги эдэдлэр рационал эдэдлэрин лимитидир	141
§ 11. Лимит һаггында теоремлэр	143
§ 12. Һэгиги эдэдлэр нэзэрийһэсинэ даир	144
Эдэбийят	155
	163

ДҮЗЭЛИШ

Сэһи- фэ	Сэтир	Кетмишдир	Охунмалыдыр
7	юх. 5	(<i>neg</i>)	(<i>neg</i>)
18	" 10	$A + (B - C)$	$(A + B) - C$
30	аш. 6	эсрлэрлэ	эсрлэрдэ
31	" 6	садэ	эсли
61	" 3	Бу хассэ юхарыда	Бу хассэ, йэ'ни
97	аш. 3	a_n	a_n
118	" 5	$M > 0$	$N > 0$
123	" 7	$\frac{1}{\varepsilon} = 10$	$\frac{1}{\varepsilon} = 100$
140	юх. 12	B -дэн	V -дэн
154	юх. 11	$ y - b > \frac{\varepsilon}{2}$	$ y - b < \frac{\varepsilon}{2}$

5 ман. 10 гəп.

Г. Н. АГАЕВ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПРЕДЕЛЫ
(на азербайджанском языке)

АЗЕРНЕФТНЕСР

Баку — 1958